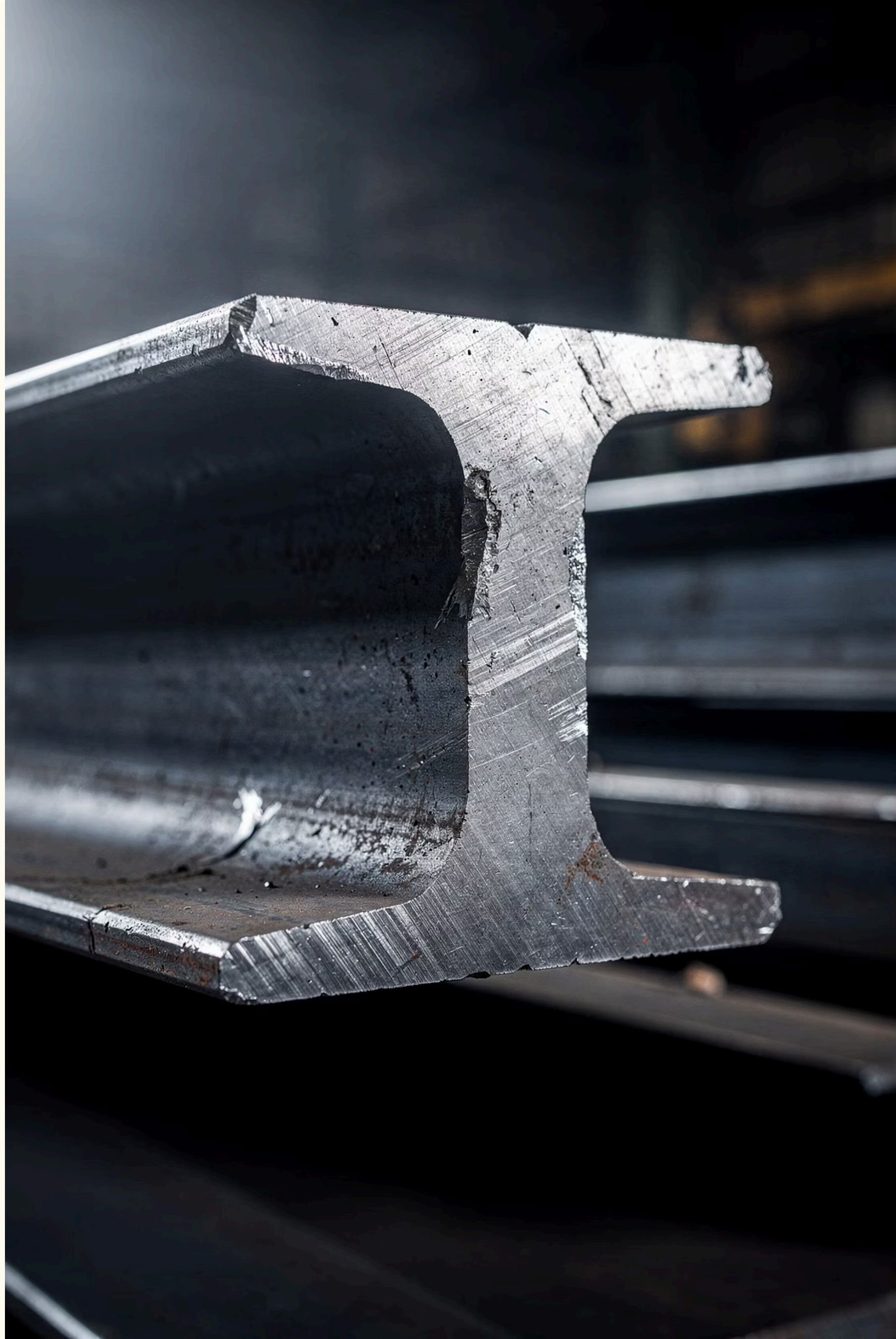
Análise de Tensão e Deformação

Tensão plana · Tensões principais · Círculo de Mohr ·

UFMT — PROF. SIMAS

Mensagem central: nem sempre a tensão máxima aparece na face originalmente desenhada no elemento. O objetivo desta unidade é aprender a "girar" o elemento de tensão e encontrar os planos críticos.



Quem foi Otto Mohr?

Christian Otto Mohr (1835–1918) foi um engenheiro civil alemão cujo nome ficou para sempre associado a uma das ferramentas mais elegantes da mecânica dos sólidos.

Esta aula é dedicada ao Círculo de Mohr — o método gráfico que ele criou e que leva seu nome até hoje.

1835 — Wesselburen, Alemanha

Nasceu em 8 de outubro de 1835 em Wesselburen, no Ducado de Holstein. Aos 16 anos ingressou no Politécnico de Hanôver para estudar engenharia.

1855–1867 — Engenheiro Ferroviário

Trabalhou como engenheiro nas Estradas de Ferro Reais de Hanôver. Em 1860 publicou um trabalho sobre flexão de vigas contínuas que chamou atenção da comunidade científica. Projetou uma das primeiras pontes de aço da Alemanha.

1867–1900 — Professor e Pesquisador

Foi nomeado professor de Mecânica Técnica no Politécnico de Stuttgart e depois na Escola Técnica Superior de Dresden (atual TU Dresden). Suas aulas eram tão claras e concorridas que foram publicadas em forma de apostilas — um hábito que persiste até hoje.

1882 — O Círculo

Publicou o método gráfico para determinação das tensões principais — o Círculo de Mohr. Também desenvolveu o critério de falha de Mohr-Coulomb, o teorema dos momentos de área e métodos para estruturas hiperestáticas.

> Mohr tinha o dom de transformar problemas complexos em construções geométricas simples. O Círculo de Mohr é o exemplo mais famoso disso: em vez de resolver equações trigonométricas, basta traçar um círculo.

Otto Mohr faleceu em 2 de outubro de 1918, em Dresden, aos 82 anos — apenas 6 dias antes de seu aniversário. Seu legado permanece vivo em todos os cursos de Resistência dos Materiais do mundo.

AULA 6 — CONCEITO FUNDAMENTAL

O que é e para que serve o Círculo de Mohr?

O Círculo de Mohr é uma representação gráfica do estado de tensões em um ponto de um material. Ele transforma o problema algébrico das equações de transformação de tensões em uma construção geométrica, permitindo visualizar como as tensões normal e cisalhante mudam quando analisamos planos inclinados dentro do mesmo elemento.

Em um estado plano de tensões, o ponto do material pode estar submetido a três componentes principais: σ_x, σ_y e τ_{xy}.

- As tensões principais σ_1 e σ_2.
- Os planos principais, onde a tensão cisalhante é nula.
- A tensão de cisalhamento máxima τ_{max}.
- A orientação dos planos onde essas tensões atuam.
- As tensões normal e cisalhante em qualquer plano inclinado do elemento.

> Quando olhamos para um elemento submetido a tensões, as tensões que aparecem nas faces x e y não são necessariamente as maiores tensões que aquele ponto sofre. Se girarmos o elemento, as componentes de tensão mudam. Em determinado ângulo, podemos encontrar planos onde não existe cisalhamento — nesses planos atuam as tensões principais. Em outro ângulo, encontramos o cisalhamento máximo. O Círculo de Mohr nos ajuda exatamente nisso: localizar graficamente esses valores críticos e os planos onde eles ocorrem.

Portanto, o Círculo de Mohr não cria novas tensões — ele apenas revela como o mesmo estado de tensões aparece quando analisado em diferentes orientações.

AULA 6 — CONCEITO

Tensões Principais — O que são?

As tensões principais são as tensões normais extremas que atuam em um ponto do material quando o elemento é analisado em uma orientação específica. Nessa orientação, chamada de plano principal, a tensão de cisalhamento é nula.

Tensão Normal

Atua perpendicularmente ao plano analisado. Tende a tracionar (positiva) ou comprimir (negativa) o material. Nos planos principais, é a única componente presente.

Tensão de Cisalhamento

Atua paralelamente ao plano analisado. Tende a provocar deslizamento relativo entre partes vizinhas do material. Nos planos principais, é sempre nula.

> Quando giramos o elemento, as tensões normais e cisalhantes mudam. Em uma determinada orientação, o cisalhamento desaparece — nessa posição aparecem as tensões principais, que são as tensões normais extremas.

As tensões principais indicam os maiores efeitos normais no ponto; o cisalhamento máximo indica a maior tendência de deslizamento interno do material.

AULA 6 — FÓRMULAS

Cálculo das Tensões Principais σ1 e σ2

Para o estado plano de tensões, as tensões principais são calculadas a partir das componentes conhecidas σx, σy e τxy. O passo intermediário é calcular o raio R do Círculo de Mohr.

Raio R

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

R representa a distância entre a tensão média e as tensões extremas no círculo. É também igual à tensão de cisalhamento máxima no plano.

Tensão Média (Centro C)

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

O centro do círculo é a tensão normal média. É uma grandeza invariante — não muda com a rotação do elemento.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \quad \text{(tensão principal máxima)}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R \quad \text{(tensão principal mínima)}$$

σ1 — Tensão Principal Máxima

Maior tensão normal no ponto. Atua no plano onde $\tau = 0$. Pode ser de tração ou compressão.

σ2 — Tensão Principal Mínima

Menor tensão normal no ponto. Também atua em plano sem cisalhamento, perpendicular ao plano de σ1.

⚠ **Atenção:** σ1 e σ2 são sempre perpendiculares entre si. Os planos principais estão a 90° um do outro no elemento real (180° no Círculo de Mohr).

AULA 6 — FÓRMULAS

Tensão de Cisalhamento Máxima τmax

A tensão de cisalhamento máxima no plano é o maior valor absoluto de cisalhamento que pode ocorrer quando o elemento é girado dentro do estado plano de tensões. No Círculo de Mohr, ela é igual ao raio do círculo.

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Localização no Círculo

τmax ocorre nos pontos superior e inferior do Círculo de Mohr — os pontos mais afastados do eixo σ.

Tensão Normal Associada

Nos planos de cisalhamento máximo, a tensão normal não é σ1 nem σ2, mas sim a tensão média:

$$\sigma_{média} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = C$$

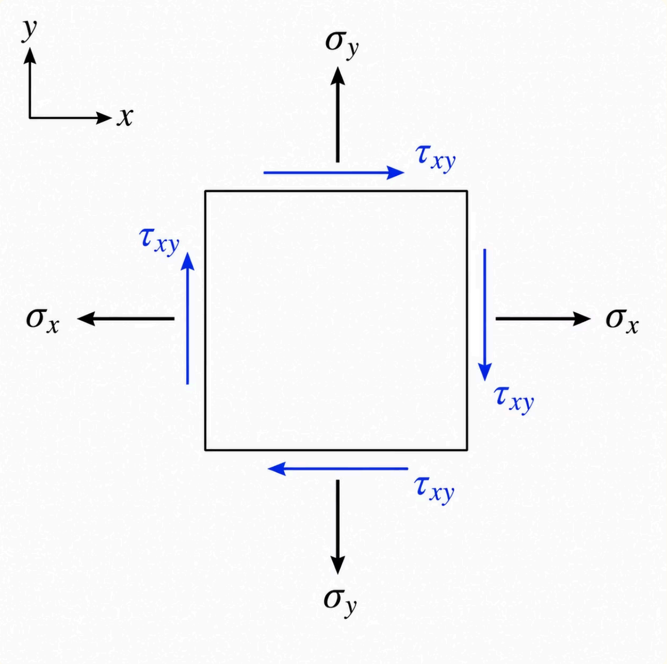
Orientação no Elemento Real

Os planos de cisalhamento máximo estão a 45° dos planos principais no elemento real. No Círculo de Mohr, esse giro aparece como 90°, pois os ângulos são representados em dobro.

> Em outra orientação, o cisalhamento atinge seu maior valor. Essa condição ocorre a 45 graus dos planos principais. O Círculo de Mohr permite enxergar isso diretamente: o cisalhamento máximo aparece no topo e na base do círculo.

Resumo: tensões principais → onde o círculo corta o eixo σ (τ = 0). Cisalhamento máximo → topo e base do círculo (a 90° dos planos principais no círculo, ou 45° no elemento real).

O Elemento Infinitesimal em Estado Plano de Tensões



Este desenho representa um ponto do material submetido a um estado plano de tensões. As setas pretas são tensões normais, pois atuam perpendicularmente às faces do elemento. As setas azuis representam a tensão de cisalhamento τxy, que atua paralelamente às faces.

> As tensões normais são positivas quando tracionam o elemento, ou seja, quando as setas saem das faces. São negativas quando comprimem o elemento, isto é, quando as setas entram nas faces. Já a tensão de cisalhamento é identificada pelo sentido de rotação produzido pelas setas tangenciais. Na convenção adotada neste desenho, τxy é positivo quando tende a girar o elemento no sentido horário e negativo quando tende a girá-lo no sentido anti-horário.

O desenho mostra o estado inicial de tensões no ponto. Ao girar esse elemento, as componentes σ e τ mudam, permitindo encontrar as tensões principais e o cisalhamento máximo.

AULA 6 — PLANOS PRINCIPAIS

O Elemento Girado — Posição dos Planos Principais

Estamos vendo o mesmo ponto do material, mas o elemento foi girado de um ângulo θp até uma posição especial — aquela em que a tensão de cisalhamento desaparece completamente. Nessa orientação, restam apenas tensões normais, chamadas de tensões principais.

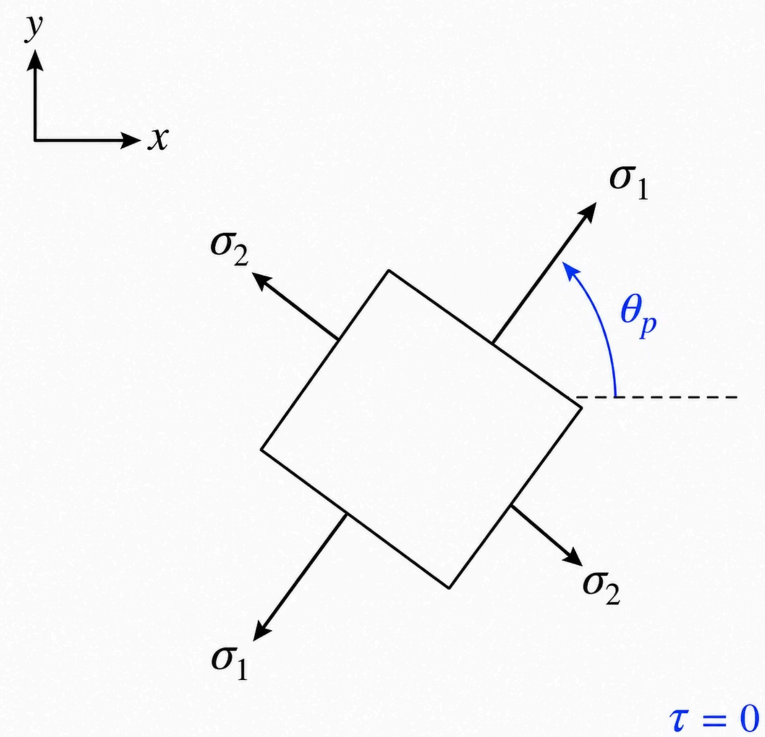
Antes da rotação (sistema original)

O elemento apresentava σ_x, σ_y e τ_{xy}. As faces tinham tanto tensões normais quanto cisalhamento. O cisalhamento indicava tendência de deslizamento entre as faces.

Após a rotação de θp (planos principais)

$\tau = 0$ — o cisalhamento desaparece completamente. Restam apenas σ_1 (tensão principal máxima) e σ_2 (tensão principal mínima). Não há mais tendência de deslizamento entre as faces.

O elemento não mudou — apenas foi observado em uma orientação diferente. O estado de tensões no ponto é o mesmo; o que muda é o sistema de referência.



O Ângulo θp e as Tensões Principais σ1 e σ2

O ângulo θp é o ângulo de rotação do elemento necessário para sair da posição original e chegar à posição principal — aquela em que o cisalhamento é nulo e atuam apenas σ1 e σ2.

$$\theta_p \;=\; \text{ângulo que leva o elemento aos planos principais} \quad (\tau = 0)$$

O que θp indica

Quanto o elemento precisou girar a partir do sistema original (x–y) para encontrar a orientação em que o cisalhamento desaparece e onde atuam as tensões principais.

σ1 — Tensão Principal Máxima

A maior tensão normal no ponto. Atua perpendicularmente à face girada. Setas saindo do elemento → tração. σ1 ≥ σ2 sempre.

σ2 — Tensão Principal Mínima

A menor tensão normal no ponto. Atua na face perpendicular à de σ1. Pode ser de tração (positiva) ou compressão (negativa), dependendo do estado de tensões.

> As tensões principais são as tensões normais extremas no ponto: σ1 é a maior e σ2 é a menor. Vários critérios de falha e dimensionamento em resistência dos materiais usam justamente as tensões principais como referência.

⚠ **Importante:** os planos principais são sempre perpendiculares entre si — estão a 90° um do outro no elemento real. No Círculo de Mohr, essa separação aparece como 180°, pois os ângulos são representados em dobro.

O Elemento Girado — Posição do Cisalhamento Máximo

Após encontrar os planos principais (onde $\tau = 0$), giramos o elemento mais um pouco — até a orientação em que a tensão de cisalhamento atinge seu valor máximo. Essa posição especial está sempre a 45° dos planos principais no elemento real.

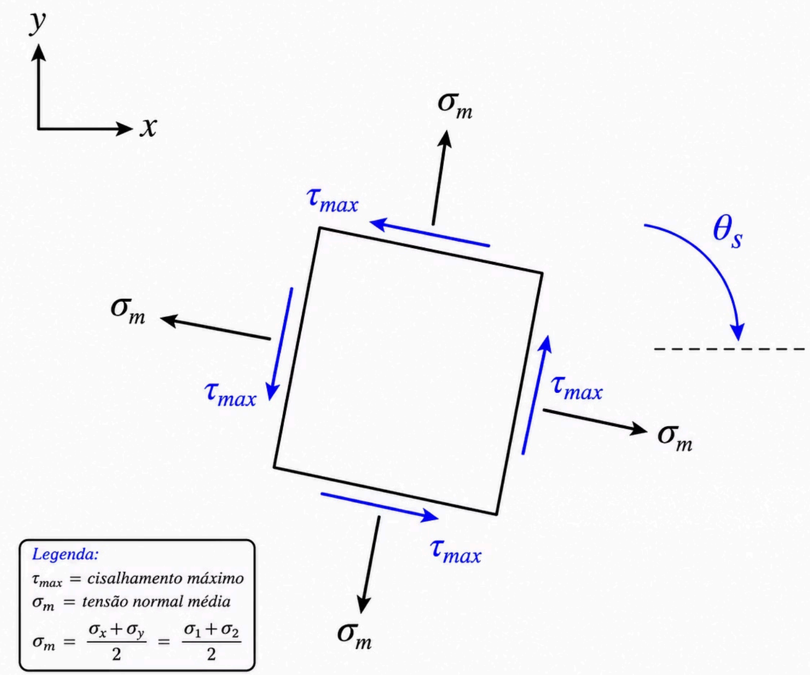
Antes (planos principais — θp)

$\tau = 0$. Atuam apenas σ_1 e σ_2 nas faces. Não há deslizamento entre as faces. É a orientação de tensões normais extremas.

Agora (planos de τmax — θs = θp + 45°)

τ_{max} atua paralelamente às quatro faces (setas azuis). Ainda existem tensões normais nas faces, mas elas não são σ_1 nem σ_2 — são iguais à tensão normal média σ_m.

Resumo: planos principais → σ_1 e σ_2, com $\tau = 0$. Planos de τ_{max} → τ_{max} nas faces e tensão normal média σ_m em todas as faces.



cisalhamento máximo

Elemento girado de um ângulo θ_s em relação à posição inicial. Nesta orientação, o cisalhamento nas faces é máximo (τ_{max}) e a tensão normal em todas as faces é a tensão média (σ_m).

O que atua nos planos de τmax?

Quando o elemento está na posição de cisalhamento máximo, duas grandezas atuam simultaneamente em cada face: a tensão de cisalhamento máxima τmax e a tensão normal média σm.

Tensão de Cisalhamento Máxima τmax

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Atua paralelamente às quatro faces do elemento girado. É o maior valor de cisalhamento possível naquele ponto do material.

Tensão Normal Média σm

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = C$$

Atua perpendicularmente às faces. Não é σ1 nem σ2 — é a tensão normal média, igual ao centro C do Círculo de Mohr. É a mesma em todas as faces nessa orientação.

Orientação

Os planos de τmax estão a 45° dos planos principais no elemento real. No Círculo de Mohr, essa separação aparece como 90° (ângulos em dobro).

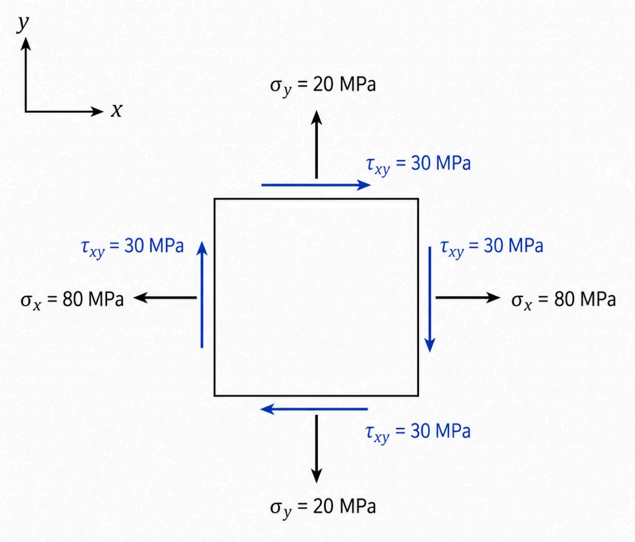
No Círculo de Mohr

τmax corresponde ao ponto mais alto (ou mais baixo) do círculo — a maior distância vertical ao eixo σ. A abscissa desse ponto é C = σm.

Passo 1 — Localizar o Centro C do Círculo

O primeiro passo para construir o Círculo de Mohr é localizar seu centro. O centro fica sempre sobre o eixo das tensões normais σ — sua coordenada vertical é sempre zero.

Dados do exemplo: σx = 80 MPa | σy = 20 MPa | τxy = 30 MPa



Elemento em estado plano de tensões

Resumo do Passo 1: calcule $\sigma m = (\sigma x + \sigma y)/2$ e marque o ponto C = (σm, 0) sobre o eixo σ. Para o exemplo: C = (50, 0).

Construindo o círculo de Morh

Posição do Centro

O centro C está sempre sobre o eixo σ, com coordenada vertical nula:

$$C = (\sigma_m,\ 0)$$

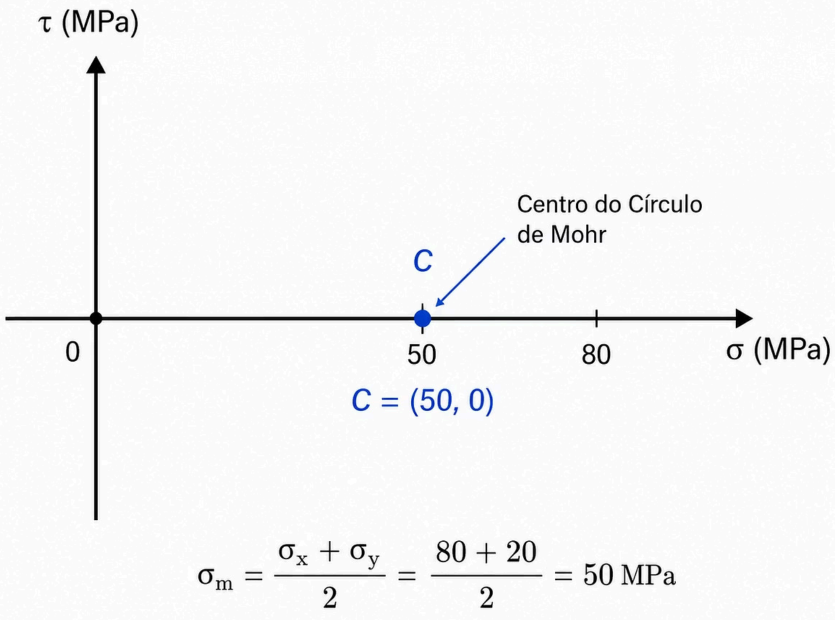
A coordenada horizontal é a tensão normal média σm — invariante de rotação.

Cálculo de σm

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{80 + 20}{2} = \frac{100}{2} = \mathbf{50}\ \mathrm{MPa}$$

Portanto, o centro do círculo é:

$$C = (50,\ 0)$$



Centro do círculo no eixo das tensões normais

Passo 2 — Plotar os Pontos A e B

No Círculo de Mohr, os pontos A e B representam as tensões que atuam em duas faces perpendiculares do elemento. Cada ponto tem coordenadas (σ, τ): a horizontal é a tensão normal e a vertical é a tensão de cisalhamento.

Ponto A — face x

$$A = (\sigma_x,\ -\tau_{xy}) = (80,\ -30)\ \mathrm{MPa}$$

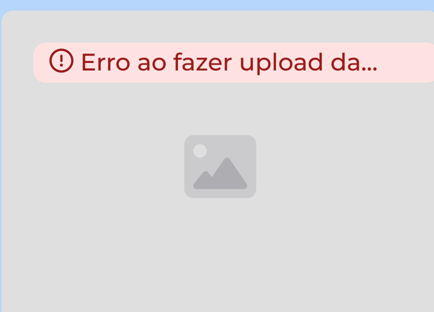
A face x contribui com σx na horizontal e −τxy na vertical. Como τxy = +30 MPa, o ponto A fica abaixo do eixo σ.

Ponto B — face y

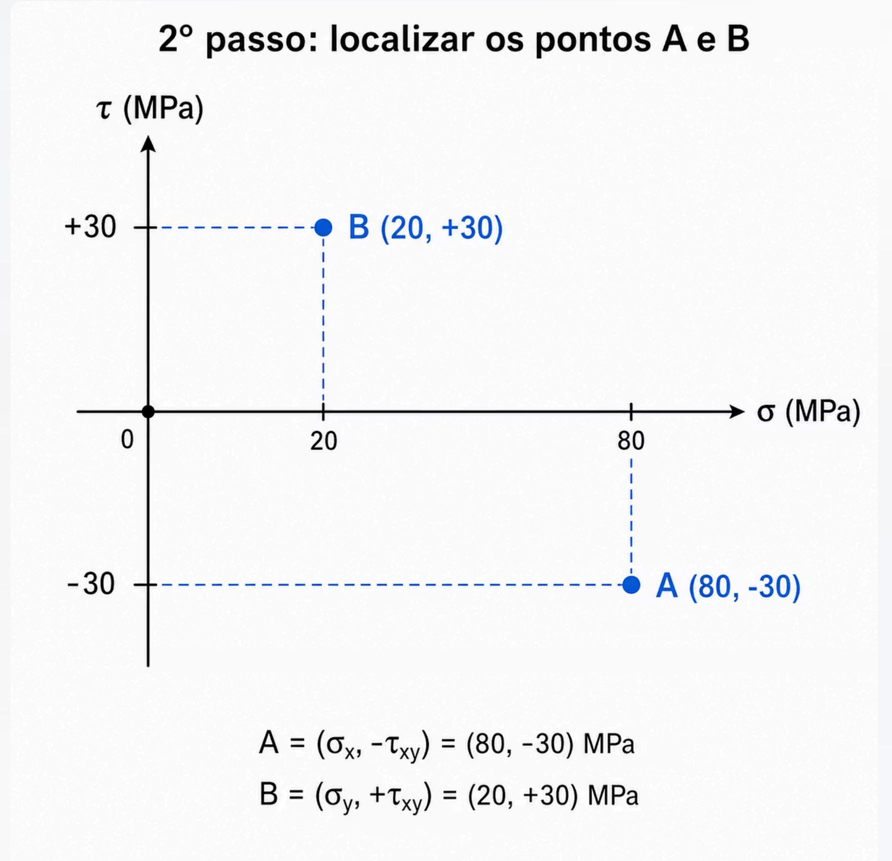
$$B = (\sigma_y,\ +\tau_{xy}) = (20,\ +30)\ \mathrm{MPa}$$

A face y contribui com σy na horizontal e +τxy na vertical. O ponto B fica acima do eixo σ.

Dados do exemplo: σx = 80 MPa | σy = 20 MPa | τxy = 30 MPa | C = (50, 0)



Verificação: ponto médio de A e B = ((80+20)/2, (−30+30)/2) = (50, 0) = C ✓



Passo 2 (continuação) — Calcular o Raio R

O raio R é a distância do centro C até qualquer um dos pontos A ou B. Pode ser calculado de duas formas equivalentes.

C = (50, 0) | A = (80, −30) | B = (20, +30) — todos em MPa

Método 1 — Distância de C até A

Usando a distância euclidiana entre C = (50, 0) e A = (80, −30):

$$R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_m)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$R = \sqrt{(80-50)^2 + 30^2} = \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{900 + 900} = \sqrt{1800} \approx \mathbf{42{,}43}\ \mathrm{MPa}$$

Método 2 — Fórmula Direta

Usando diretamente as componentes do estado de tensões:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{80-20}{2}\right)^2 + 30^2} = \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800} \approx \mathbf{42{,}43}\ \mathrm{MPa}$$

Por que os dois métodos dão o mesmo resultado?

Porque (σx − σm) = (σx − σy)/2. Substituindo σm = (σx + σy)/2: σx − σm = σx − (σx + σy)/2 = (σx − σy)/2. Os métodos são algebricamente idênticos.

O que o raio representa?

R é a amplitude do Círculo de Mohr. Ele representa a variação máxima das tensões em relação à média. R = τmax — o raio é numericamente igual à tensão de cisalhamento máxima no plano.

Resumo do Passo 3: R = √[(σx − σy)²/4 + τxy²] = 42,43 MPa. Com C e R definidos, o círculo está completamente determinado.

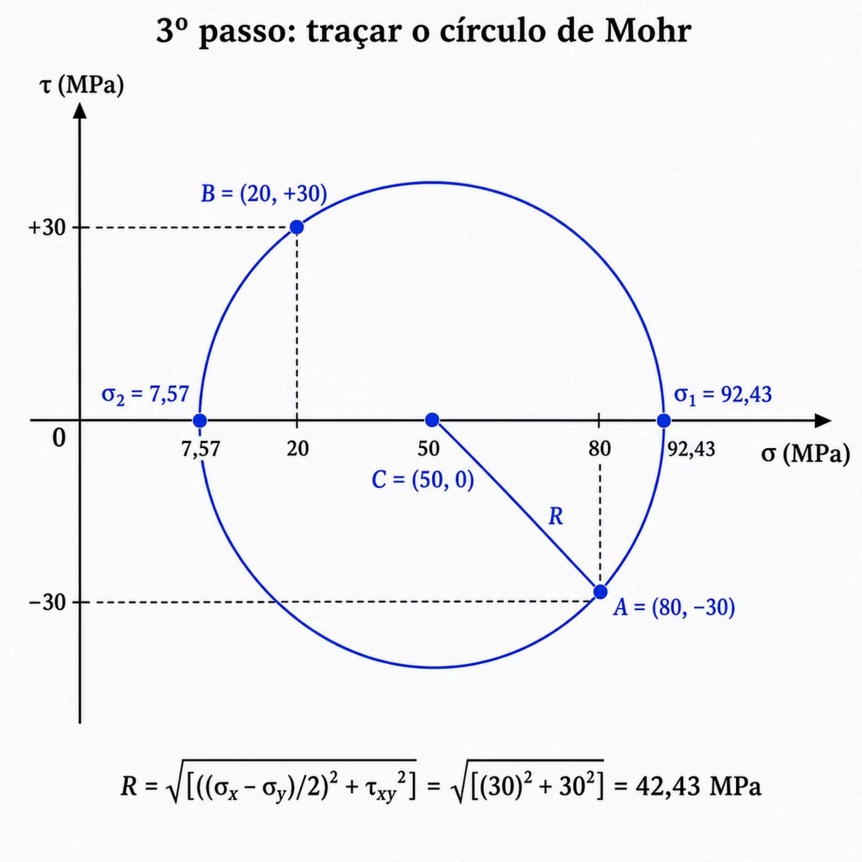
Passo 3 — Traçar o Círculo de Mohr

Com o centro C e os pontos A e B definidos, traçamos o Círculo de Mohr passando exatamente por esses dois pontos. O raio é a distância do centro até qualquer ponto do círculo.

C = (50, 0) | A = (80, −30) | B = (20, +30) | R = 42,43 MPa — todos em MPa

Agora já temos todos os elementos para desenhar o Círculo de Mohr. Primeiro marcamos o centro em 50 MPa. Depois marcamos os pontos A e B. O círculo deve passar exatamente por esses dois pontos, com raio R = 42,43 MPa.

Com C e R definidos, o círculo está completamente determinado. O próximo passo é identificar as tensões principais nas interseções do círculo com o eixo σ.



Passo 3 — Encontrar σ1 e σ2 no Círculo

As tensões principais são as interseções do Círculo de Mohr com o eixo σ — os pontos onde τ = 0. Elas são obtidas somando e subtraindo o raio R da tensão média σm.

$$\sigma_1 = \sigma_m + R = 50 + 42{,}43 = \mathbf{92{,}43}\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_m - R = 50 - 42{,}43 = \mathbf{7{,}57}\ \text{MPa}$$

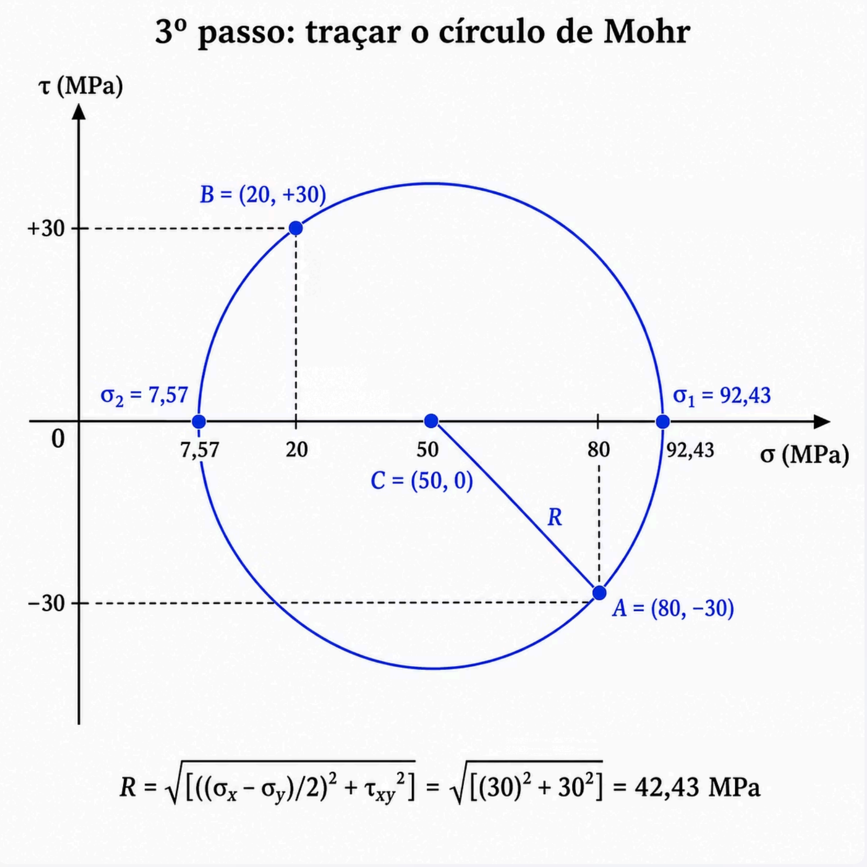
σ1 = 92,43 MPa

Extremidade direita do círculo no eixo σ. É a maior tensão normal no ponto. Atua no plano principal onde τ = 0. Como σ1 > 0, representa tração.

σ2 = 7,57 MPa

Extremidade esquerda do círculo no eixo σ. É a menor tensão normal no ponto. Também de tração (σ2 > 0). O ponto está em estado biaxial de tração pura.

⚠ Verificação: σ1 + σ2 = 92,43 + 7,57 = 100 MPa = σx + σy = 80 + 20 = 100 MPa ✓ — a soma das tensões normais é invariante de rotação.



Passo 4 — Calcular o Ângulo Principal θp

Para encontrar a posição em que o cisalhamento é nulo, calculamos o ângulo principal θp. Esse ângulo indica quanto o elemento real precisa ser girado para que as faces coincidam com os planos principais.

Dados: σx = 80 MPa | σy = 20 MPa | τxy = 30 MPa

O ângulo principal é obtido pela fórmula:

$$\tan(2\theta_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Substituindo os valores

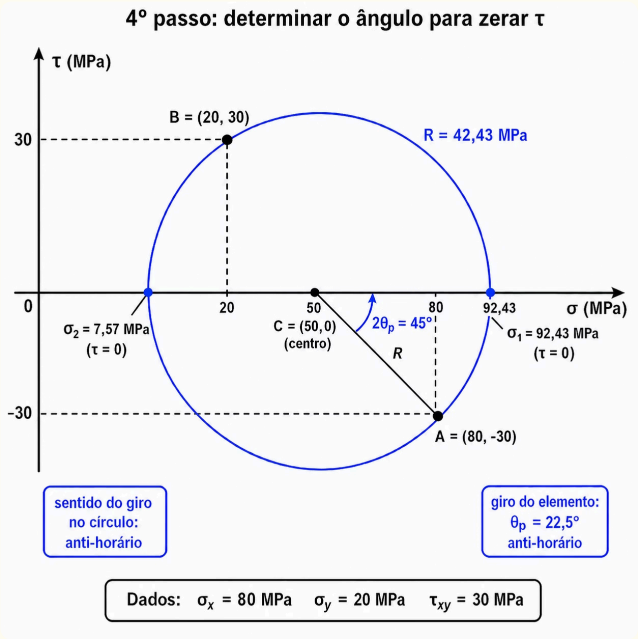
$$\tan(2\theta_p) = \frac{2 \cdot 30}{80 - 20} = \frac{60}{60} = 1$$

$$2\theta_p = \arctan(1) = 45^\circ$$

$$\theta_p = \frac{45^\circ}{2} = \mathbf{22{,}5^\circ}$$

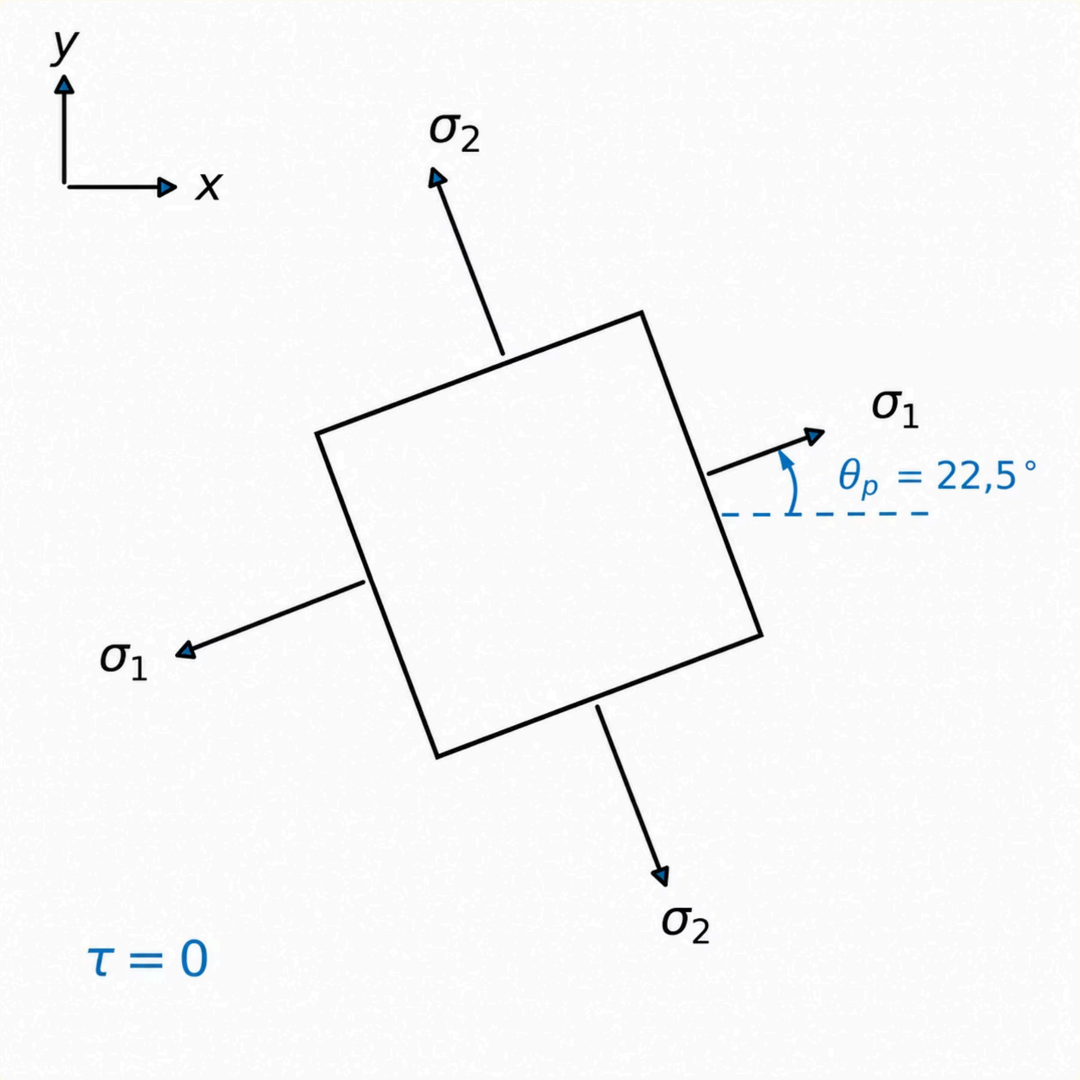
Interpretação

O ângulo θp = 22,5° indica que o elemento precisa ser girado 22,5° no sentido anti-horário a partir da posição original para que as faces coincidam com os planos principais.



Passo 4 (continuação) — θp no Círculo de Mohr e no Elemento Real

O ângulo θp conecta o Círculo de Mohr ao elemento real. Entender essa relação é fundamental para interpretar corretamente o círculo.



No Círculo de Mohr

O ângulo 2θp = 45° é medido a partir do ponto A = (80, −30) no sentido anti-horário até a extremidade direita do círculo (σ1 = 92,43 MPa, τ = 0). Esse ponto de chegada é σ1.

No Elemento Real

O ângulo θp = 22,5° é a rotação física do elemento. Ao girar 22,5° no sentido anti-horário, as faces do elemento coincidem com os planos principais — onde τ = 0 e atuam σ1 e σ2.

Passo 5 — Ângulo para o Cisalhamento Máximo θs

Após encontrar o plano principal (θp = 22,5°), onde τ = 0, queremos saber em que ângulo o cisalhamento atinge seu valor máximo. Esse ângulo é chamado de θs.

ⓘ Do passo anterior: θp = 22,5° → 2θp = 45° no Círculo de Mohr

O cisalhamento máximo ocorre a 90° do plano principal no Círculo de Mohr — o que corresponde a 45° no elemento real. Portanto:

$$\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ$$

Girando +45° (anti-horário)

$$\theta_s = 22{,}5^\circ + 45^\circ = \mathbf{67{,}5}^\circ$$

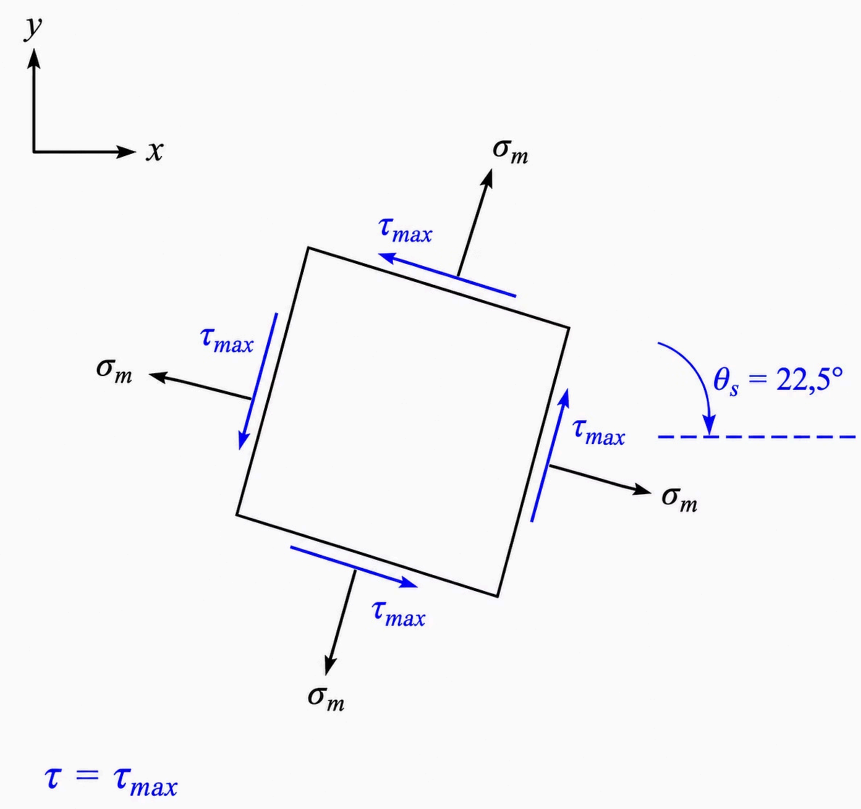
O elemento é girado 67,5° no sentido anti-horário a partir da posição original. Essa é uma posição de cisalhamento máximo.

Girando −45° (horário)

$$\theta_s = 22{,}5^\circ - 45^\circ = -\mathbf{22{,}5}^\circ$$

O elemento é girado 22,5° no sentido horário a partir da posição original. Essa é a outra posição equivalente de cisalhamento máximo.

⚠ As duas posições (θs = 67,5° e θs = −22,5°) representam planos de cisalhamento máximo ortogonais entre si. Eles diferem apenas no sinal/orientação do cisalhamento — o valor absoluto τmax é o mesmo nos dois.



Exercício 1 — Construção Completa do Círculo de Mohr

Dados: $\sigma x = 90$ MPa | $\sigma y = 30$ MPa | $\tau xy = 40$ MPa

Convenção: tração positiva; eixo τ positivo para cima; ponto A → face x; ponto B → face y.

Pede-se:

- (a–b) Desenhar o elemento inicial e identificar o sinal de cada componente de tensão.
- (c–d) Calcular a tensão normal média σm e localizar o centro $C = (\sigma m, 0)$.
- (e–f) Determinar as coordenadas de $A = (\sigma x, -\tau xy)$ e $B = (\sigma y, +\tau xy)$ e representá-los no plano (σ, τ).
- (g–h) Calcular o raio R e traçar o Círculo de Mohr passando por A e B com centro em C.
- (i–j) Determinar $\sigma 1$ e $\sigma 2$ e explicar por que $\tau = 0$ nesses pontos.
- (k–l) Calcular θp e indicar o sentido de giro do elemento para os planos principais.
- (m) Desenhar o elemento girado de θp com $\sigma 1$, $\sigma 2$ e $\tau = 0$.
- (n–p) Determinar τmax, a orientação do elemento e desenhar o elemento na posição de cisalhamento máximo.

AULA 6 — EXERCÍCIO 2

Exercício 2 — Círculo de Mohr com Compressão e Cisalhamento Negativo

Dados: $\sigma_x = 60$ MPa | $\sigma_y = -20$ MPa | $\tau_{xy} = -25$ MPa

Convenção: tração positiva, compressão negativa; eixo τ positivo para cima.

Este exercício introduz dois elementos novos em relação ao Exercício 1: uma tensão normal compressiva ($\sigma_y < 0$) e um cisalhamento negativo ($\tau_{xy} < 0$). Esses sinais afetam a posição dos pontos A e B no círculo e o sentido de giro do elemento.

Pede-se:

- (a–c) Desenhar o elemento inicial e explicar o significado físico de $\sigma_y < 0$ e $\tau_{xy} < 0$.
- (d–e) Calcular σ_m e localizar o centro $C = (\sigma_m, 0)$.
- (f–g) Determinar $A = (\sigma_x, -\tau_{xy})$ e $B = (\sigma_y, +\tau_{xy})$ e representá-los no plano (σ, τ).
- (h–i) Calcular o raio R e traçar o Círculo de Mohr.
- (j–k) Determinar σ_1 e σ_2 e identificar onde $\tau = 0$ no círculo.
- (l–m) Calcular θ_p e determinar o sentido de giro do elemento.
- (n) Desenhar o elemento na posição dos planos principais com σ_1, σ_2 e $\tau = 0$.
- (o–q) Determinar τ_{max}, explicar por que σ_m atua nos planos de τ_{max} e desenhar o elemento nessa posição.

Equações de Transformação Algébrica de Tensões

Até aqui, usamos o Círculo de Mohr para visualizar como as tensões mudam quando o elemento é girado. Agora, vamos calcular essa mesma transformação por equações. Quando um elemento em estado plano de tensões é girado de um ângulo θ, surgem novas tensões nas faces inclinadas.

Estado original

Tensões conhecidas nas faces originais:

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \tau_{xy}$$

Após rotação de θ

Novas tensões nas faces inclinadas:

$$\sigma_{x'}, \quad \sigma_{y'}, \quad \tau_{x'y'}$$

As tensões mudam porque estamos observando o mesmo ponto do material em outra orientação.

As equações de transformação são:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) + \tau_{xy}\sin(2\theta)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\theta) - \tau_{xy}\sin(2\theta)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\theta) + \tau_{xy}\cos(2\theta)$$

⚠ Convenção: θ é positivo quando o elemento gira no sentido anti-horário.

Interpretando Cada Termo das Equações

Cada termo das equações de transformação tem um significado físico preciso. Entender o papel de cada um facilita a memorização e a aplicação correta.

Tensão Normal Média — $(\sigma_x + \sigma_y)/2$

É o centro do Círculo de Mohr. Representa a parte invariante das tensões normais — permanece o mesmo em qualquer rotação do elemento. Aparece em $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$, mas nunca muda.

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_m = C \quad \text{(invariante)}$$

Diferença de Tensões — $(\sigma_x - \sigma_y)/2$

Mede a diferença entre as tensões normais nas direções x e y. Quanto maior essa diferença, maior a variação das tensões normais ao girar o elemento. Multiplica cos(2θ) e sin(2θ) — é a amplitude da oscilação.

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad \text{(amplitude de variação)}$$

Ângulo Dobrado — cos(2θ) e sin(2θ)

O ângulo aparece dobrado nas equações. Isso é a mesma ideia do Círculo de Mohr: quando o elemento real gira θ, no círculo a rotação correspondente é 2θ. Uma rotação de 90° no elemento corresponde a 180° no círculo.

$$\theta_{\text{real}} \longleftrightarrow 2\theta_{\text{círculo}}$$

Verificação: $\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$

Somando as duas primeiras equações, os termos com cos(2θ) e sin(2θ) se cancelam. Resta apenas $\sigma_x + \sigma_y$ — confirmando que a soma das tensões normais é invariante de rotação.

Conexão com o Círculo de Mohr

As equações de transformação são exatamente as equações paramétricas do Círculo de Mohr. Cada ponto do círculo corresponde a um ângulo θ — e as coordenadas (σ, τ) desse ponto são exatamente $(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$.

As equações de transformação e o Círculo de Mohr são duas formas de descrever a mesma coisa: como as tensões variam com a orientação do elemento. O círculo é a representação geométrica das equações algébricas.