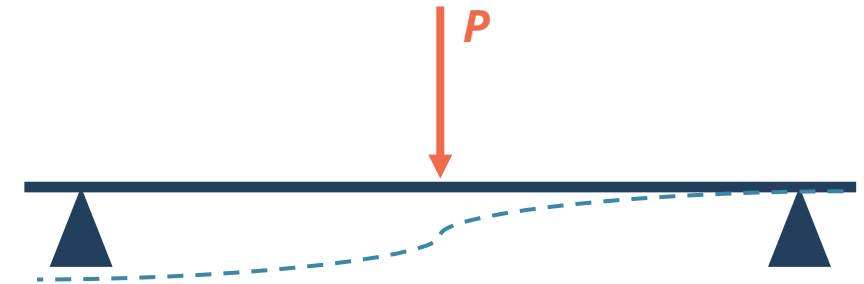


RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

# Análise de Vigas

Diagramas de esforço cortante, momento fletor e linha elástica de deflexão

Prof. Simas

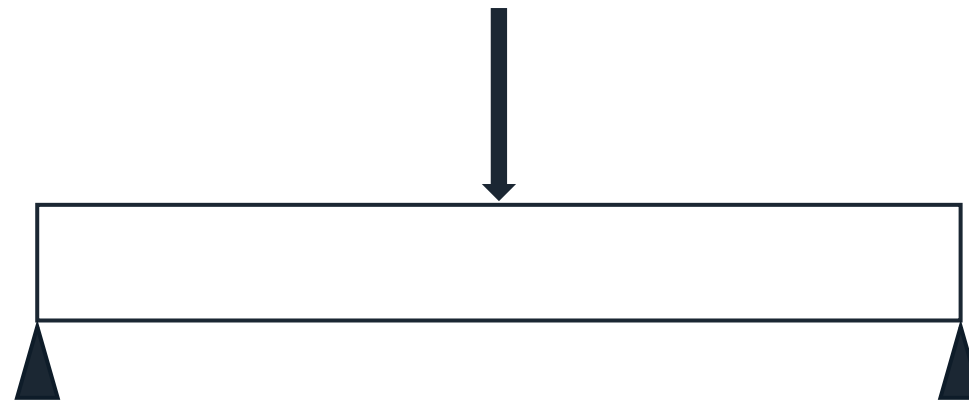


# Diagrama de Corpo Livre da Viga



Neste exemplo, temos a representação de uma viga biapoiada submetida a uma carga concentrada ( $P$ ) aplicada no meio do vão. Inicialmente, a estrutura é isolada de seus apoios, dando origem ao Diagrama de Corpo Livre da viga. Nesse diagrama, são representadas as forças externas aplicadas e as reações de apoio ( $R_A$ ) e ( $R_B$ ).

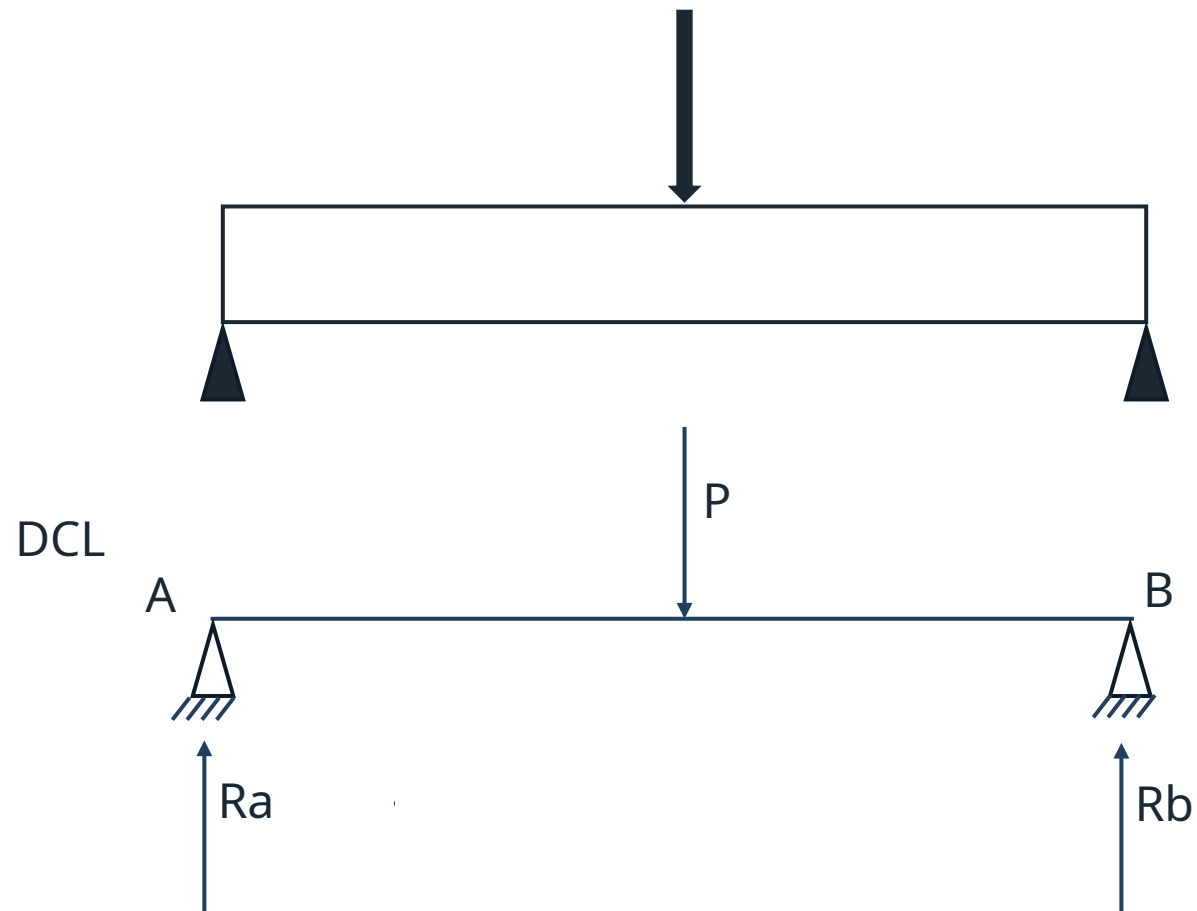
A partir desse modelo, vamos aplicar as equações de equilíbrio estático para determinar as reações nos apoios. Em seguida, construiremos os diagramas dos esforços internos que atuam ao longo da viga: o diagrama de esforço cortante ( $V(x)$ ) e o diagrama de momento fletor ( $M(x)$ ). Esses gráficos permitem visualizar como a carga aplicada se distribui internamente na estrutura e identificar os pontos críticos de sollicitação.



# Diagrama de Corpo Livre da Viga



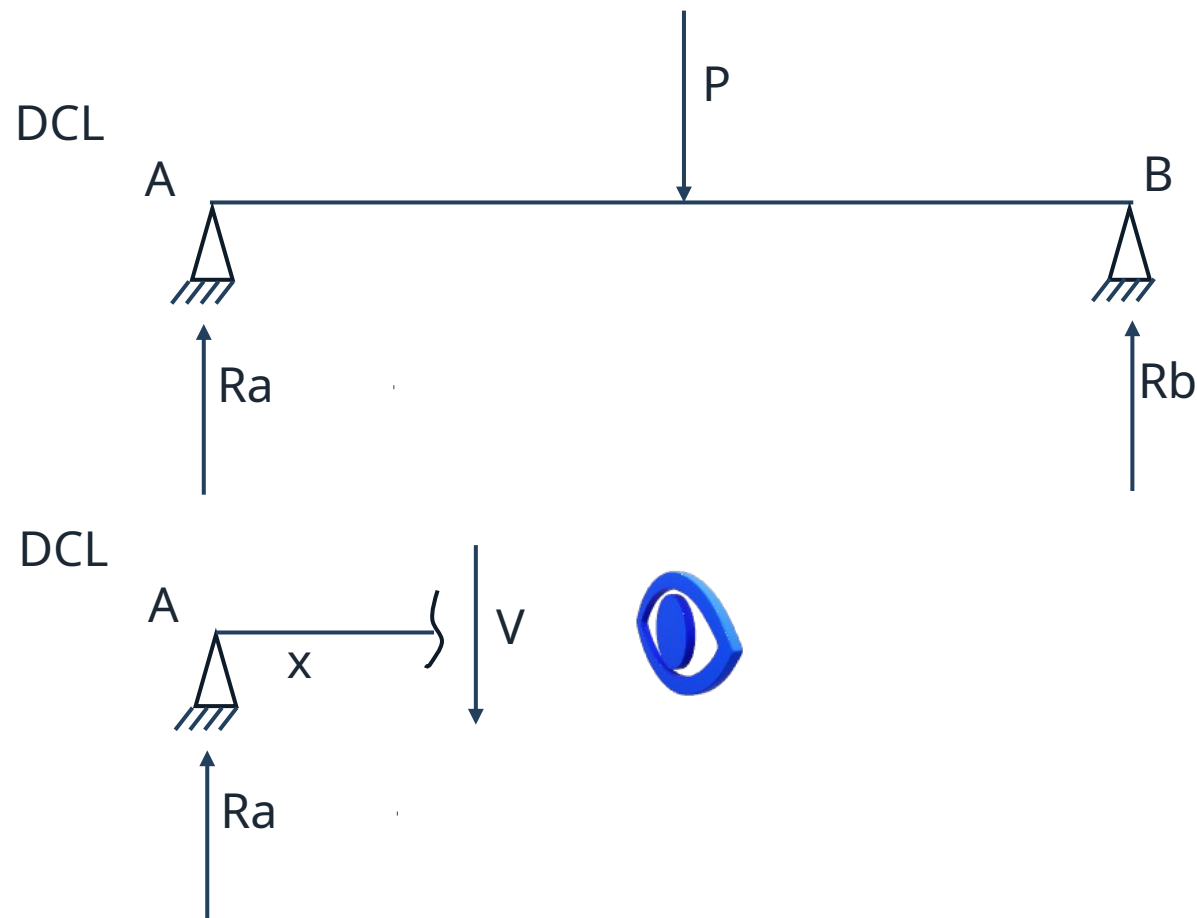
A imagem apresenta o diagrama de corpo livre de uma viga biapoiada, submetida a uma carga concentrada  $P$  aplicada no vão. No DCL, são representadas as reações verticais nos apoios A e B, indicadas por  $R_a$  e  $R_b$ , necessárias para o equilíbrio da estrutura.



# Diagrama de Esforço Cortante (V)



A figura apresenta o diagrama de corpo livre de uma viga biapoiada, no qual os apoios em A e B são representados por suas reações verticais  $R_a$  e  $R_b$ , equilibrando a carga concentrada  $P$  aplicada no vão.



i

Inicialmente, constrói-se o diagrama de corpo livre da viga e determinam-se as reações de apoio. Como a carga concentrada  $P$  está aplicada no centro do vão, a estrutura é simétrica, resultando em:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = \\ &R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$

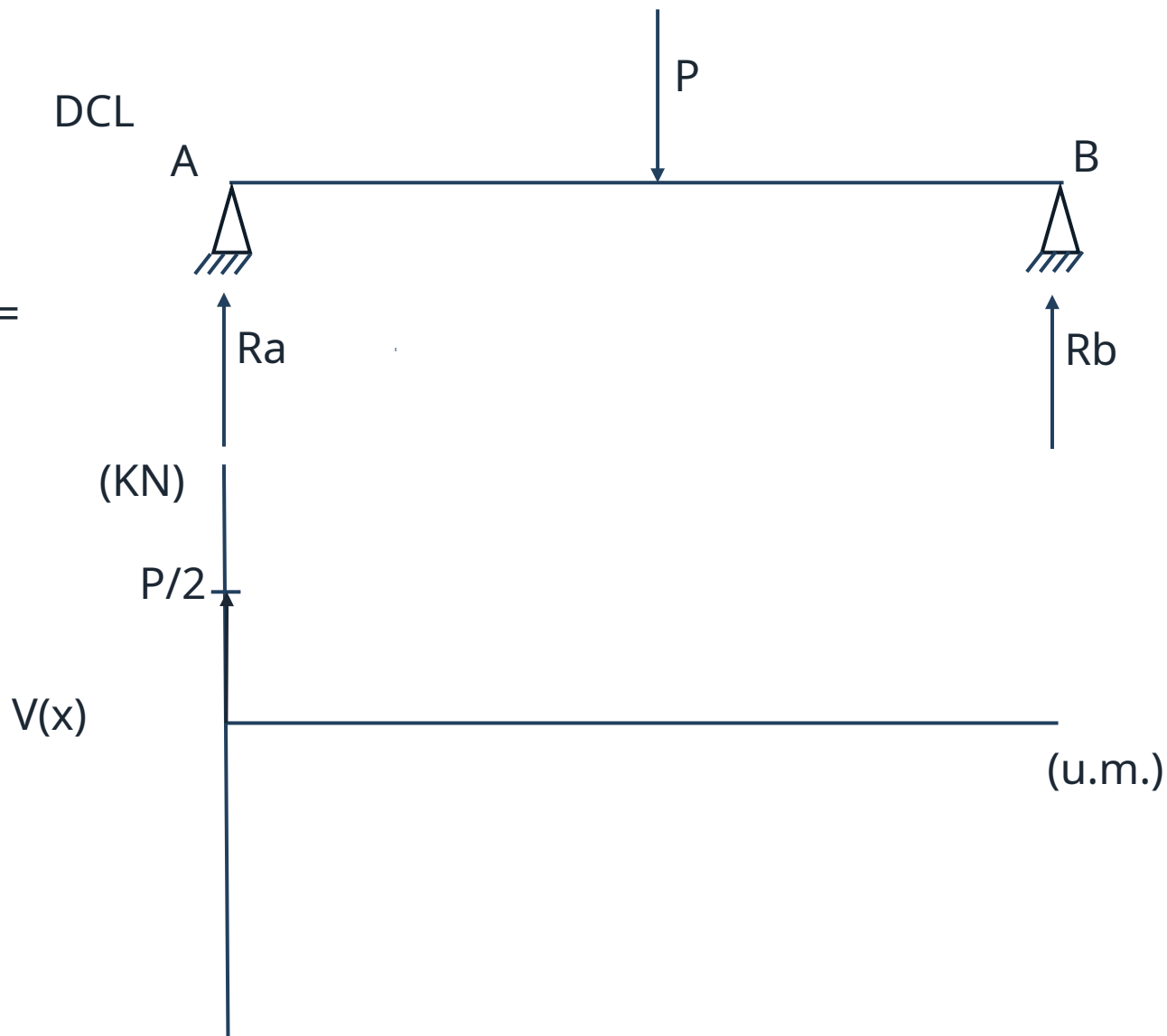
ii

Depois disso, fazemos um corte a uma distância genérica  $x$  do apoio A. Ao analisar o trecho à esquerda do corte e olhar para a face direita da seção, representamos o esforço cortante interno  $V$ . Aplicando o equilíbrio vertical nesse trecho, obtemos  $V=R_a$ , portanto  $V=P/2$ .

# Diagrama de Esforço Cortante (V)



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$



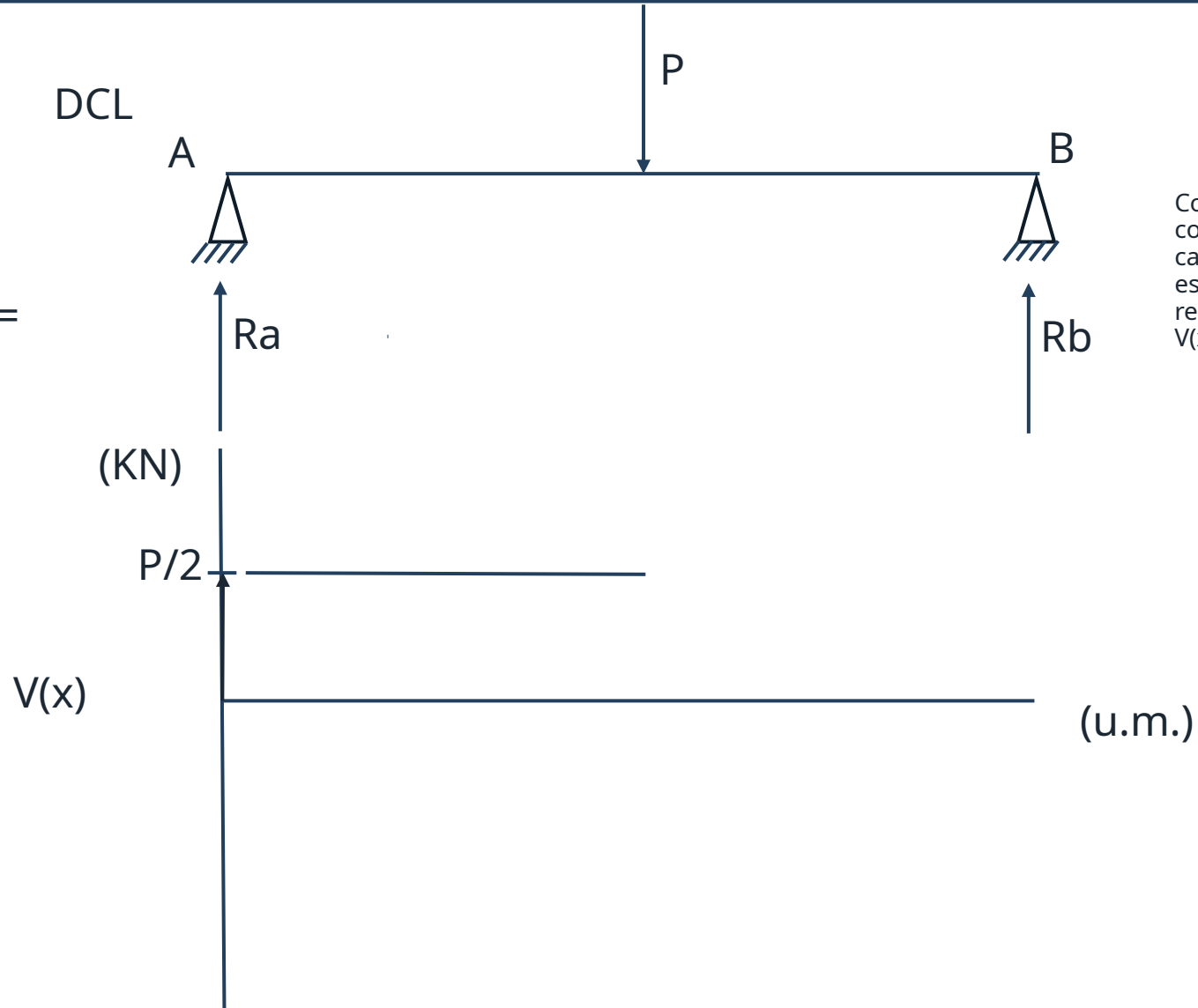
Agora começamos efetivamente a desenhar o diagrama de esforço cortante. Como já encontramos que, no primeiro trecho, o cortante vale  $P/2$ , o gráfico deve começar no apoio A com um salto vertical positivo de magnitude  $P/2$ .

Em seguida, como não existe carga distribuída entre o apoio e a carga concentrada, o valor do cortante não se altera. Por isso, traçamos uma linha horizontal constante até o ponto onde a carga  $P$  está aplicada.

# Diagrama de Esforço Cortante (V)



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$

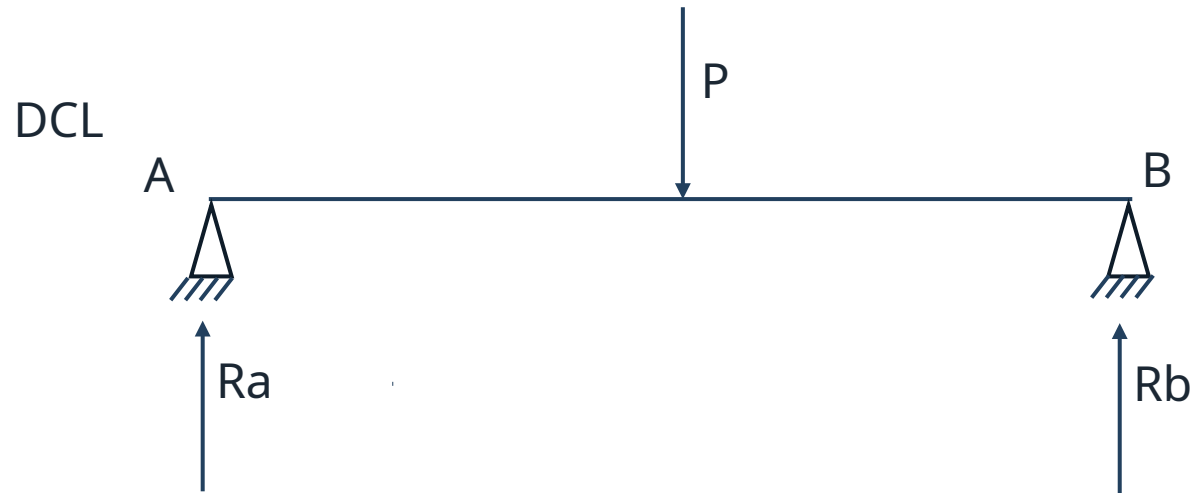


Com  $R_a = P/2$ , o diagrama de esforço cortante inicia com um salto positivo no apoio A. Como não há carregamento distribuído no primeiro trecho, o esforço cortante permanece constante, sendo representado por uma linha horizontal no valor  $V(x) = P/2$ .

# Diagrama de Esforço Cortante (V)

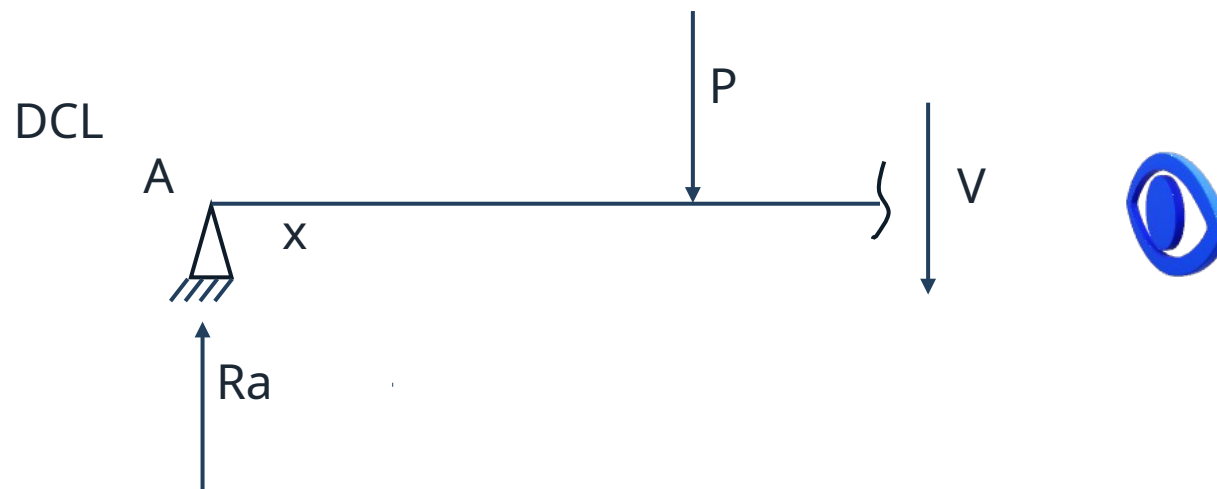


$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$



Após a análise do primeiro trecho, realiza-se um novo corte em uma seção localizada à direita da carga concentrada P, a uma distância x do apoio A.

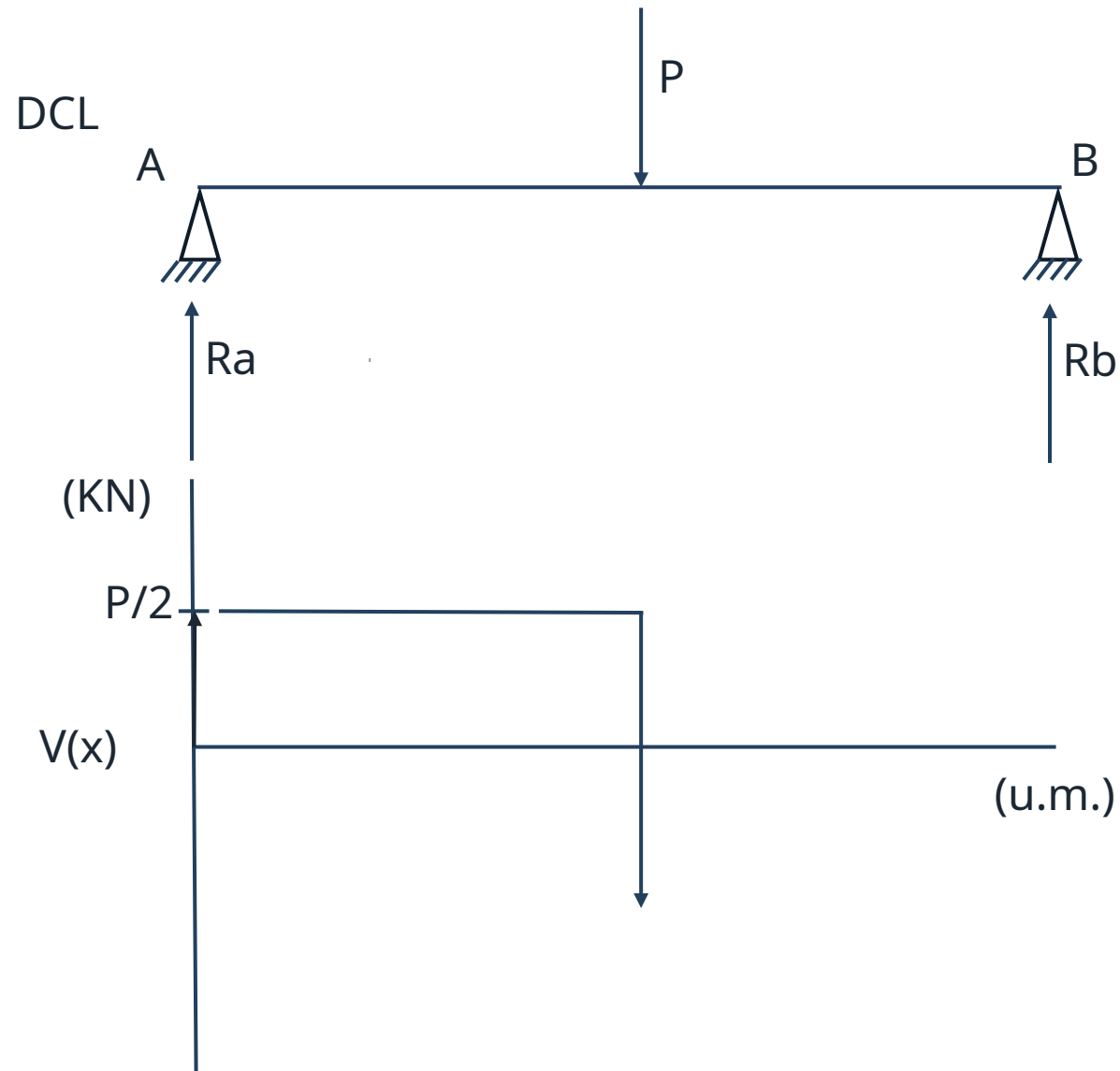
Ao isolar o trecho à esquerda do corte, passam a atuar nesse segmento a reação de apoio Ra e a carga concentrada P.



# Diagrama de Esforço Cortante (V)



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$

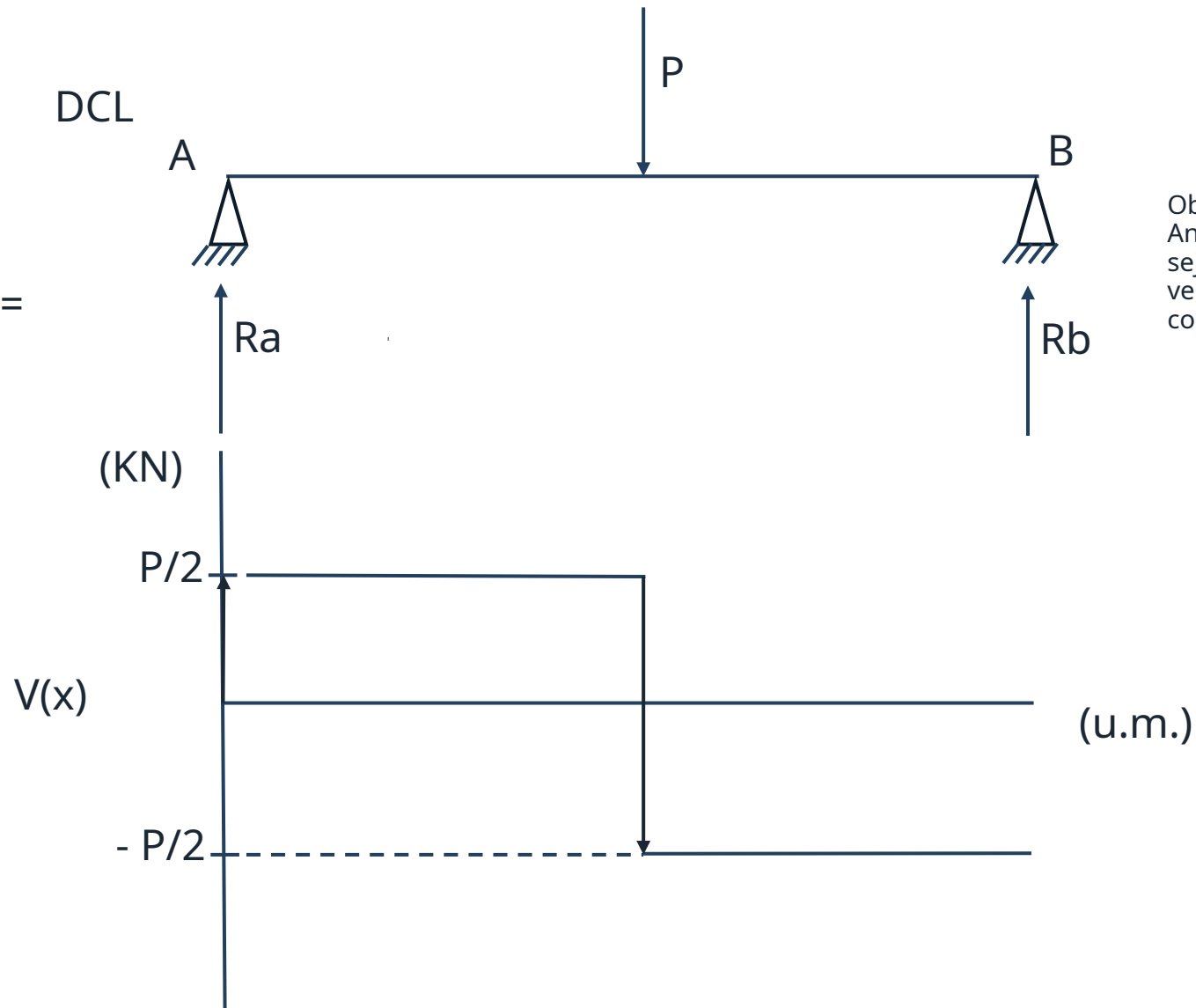


Agora chegamos ao ponto onde a carga concentrada  $P$  atua. Como ela está voltada para baixo, ela reduz o valor do esforço cortante. Por isso, no gráfico, não aparece uma linha inclinada, mas sim uma queda vertical.

# Diagrama de Esforço Cortante (V)



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$

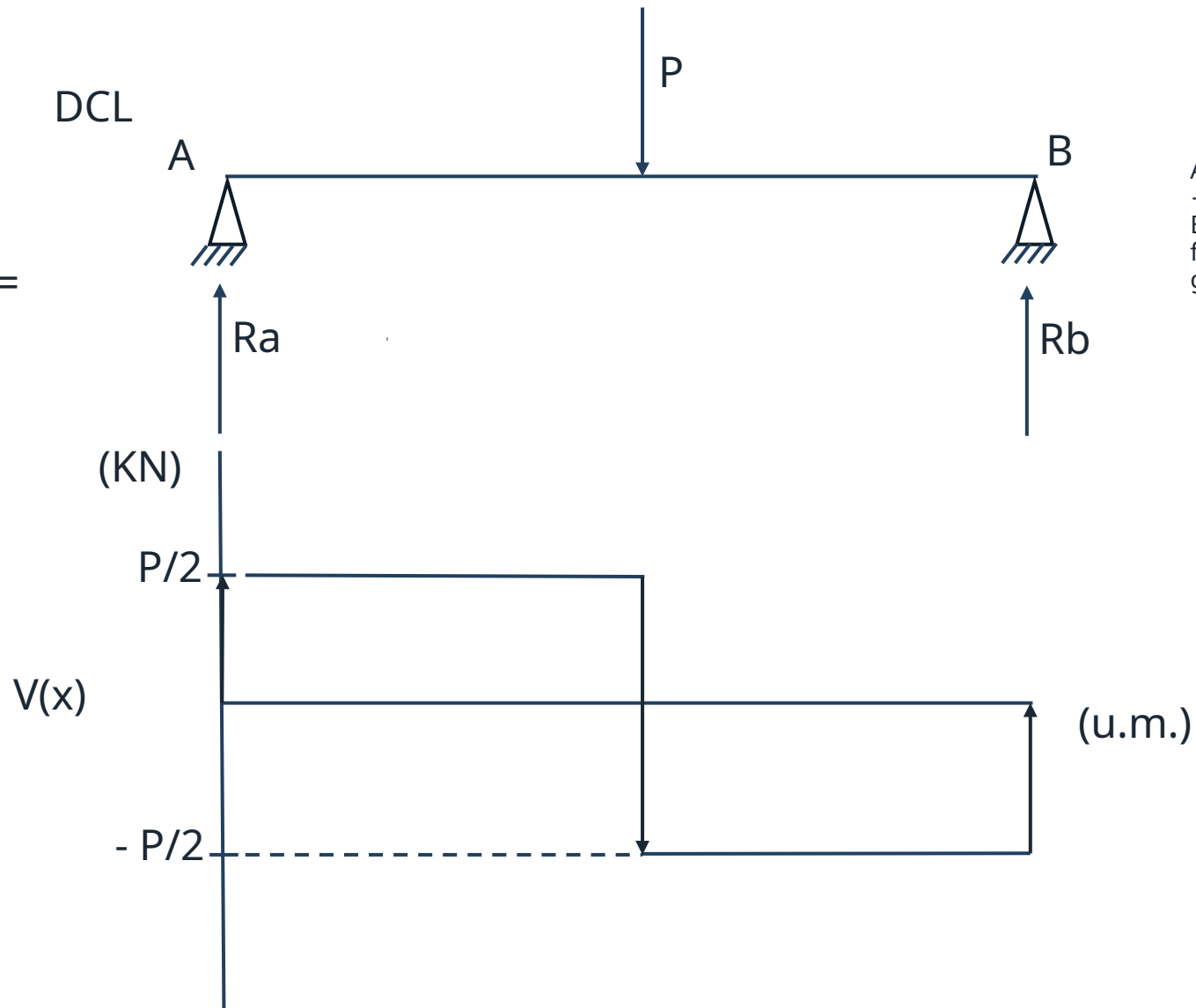


Observação técnica:  
Antes da carga:  $V=+P/2$  depois da carga:  $V=-P/2$ . Ou seja, a carga concentrada  $P$  provoca uma queda vertical de magnitude  $P$  no diagrama de esforço cortante.

# Diagrama de Esforço Cortante (V)



$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$

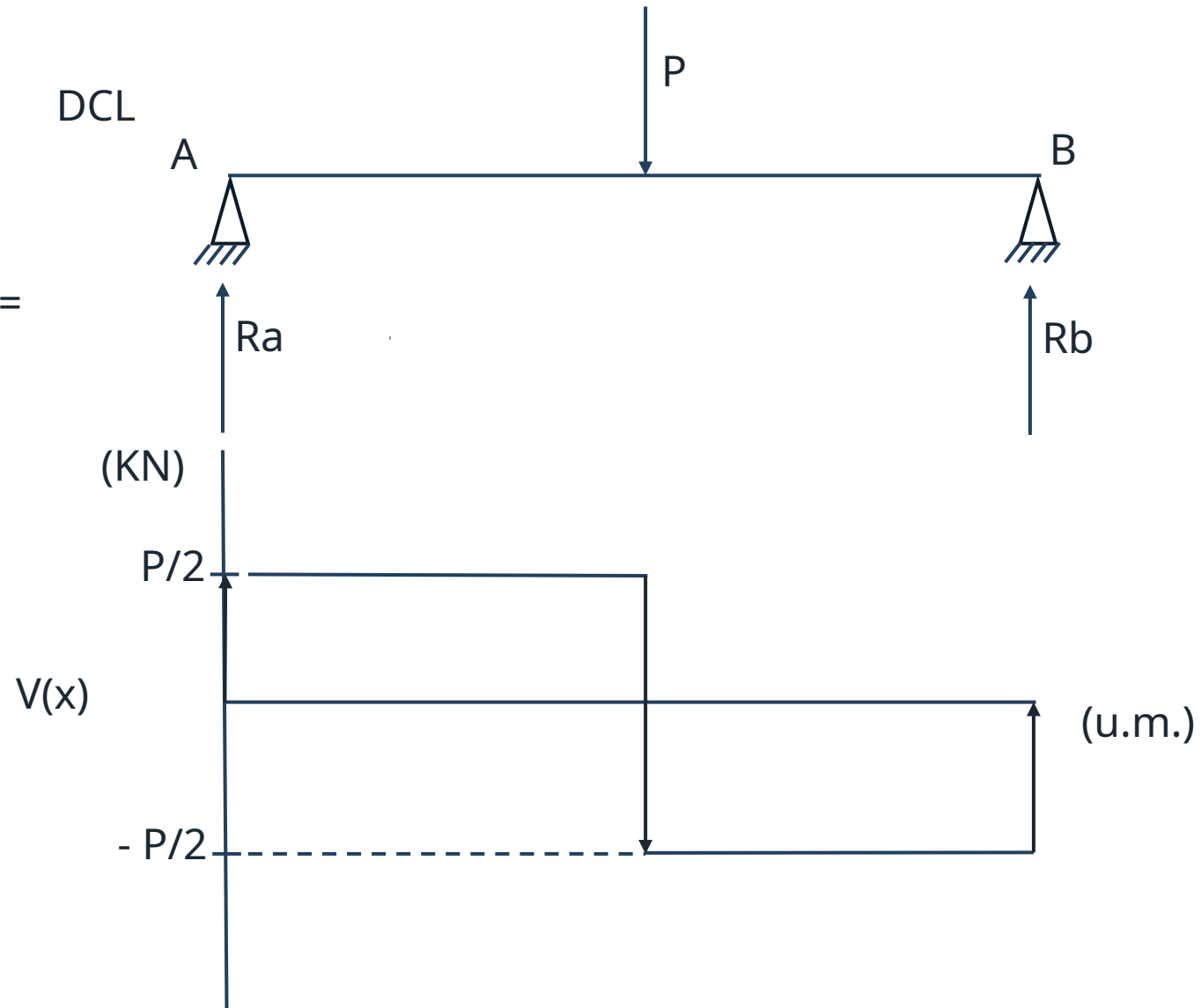


Após a carga concentrada  $P$ , o cortante passa a ser  $-P/2$  e permanece constante até o apoio B. No apoio B, a reação  $R_b = P/2$  provoca um salto positivo, fazendo o diagrama retornar a zero e concluindo o gráfico.

# Diagrama de Esforço Cortante (V)



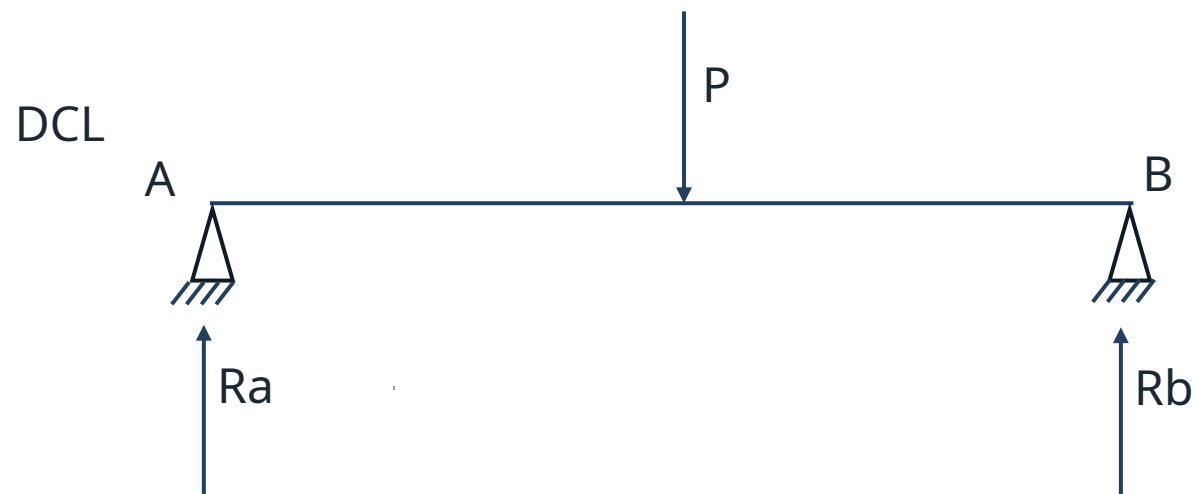
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$



# Diagrama de Momento Fletor (M)



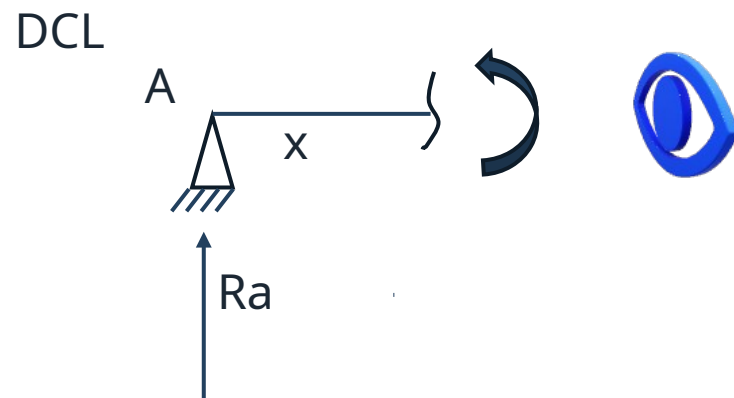
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a + R_b - P &= 0 \\ \text{Sendo } R_a &= R_b = R \\ \mathbf{R} &= \mathbf{P/2}\end{aligned}$$



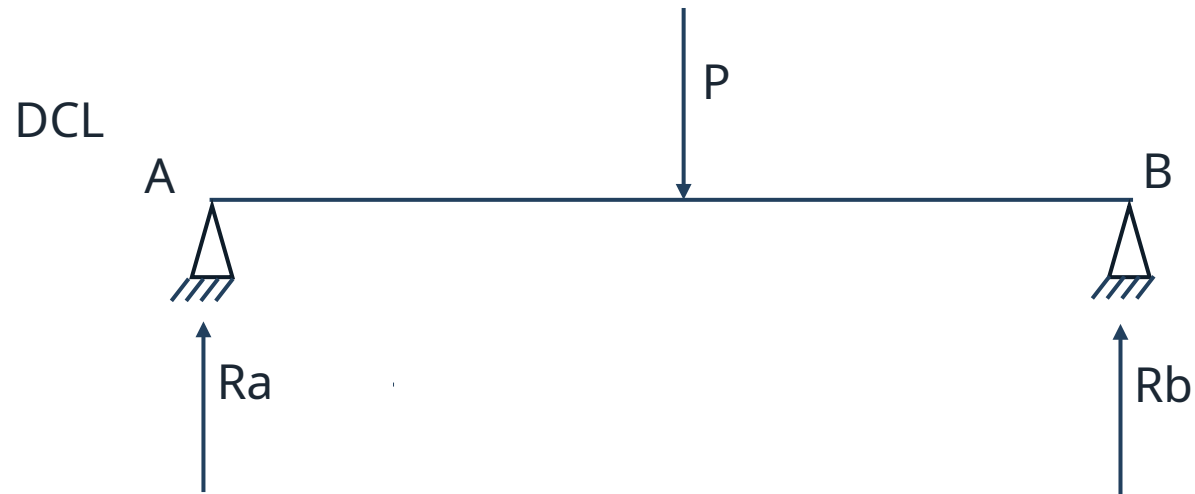
Após determinar as reações de apoio, realiza-se um corte a uma distância  $x$  do apoio A. No trecho isolado, atua a reação  $R_a$ , que gera momento em relação à seção cortada. Aplicando o equilíbrio de momentos, obtém-se:

$$M(x) = R_a x = P/2 x$$

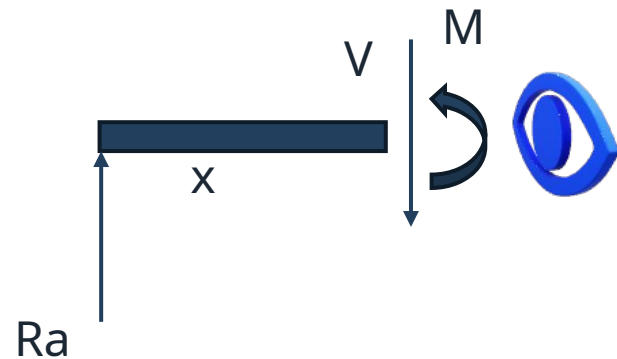
Assim, no primeiro trecho, o momento fletor cresce linearmente a partir do apoio A.



# Diagrama de Momento Fletor (M)

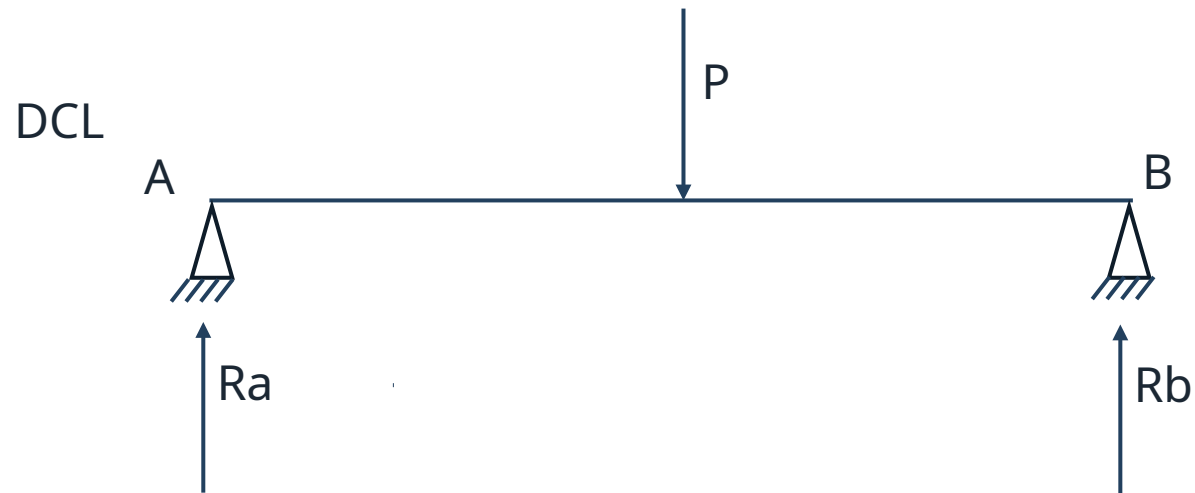


$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a - V &= 0 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{R_a}\end{aligned}$$

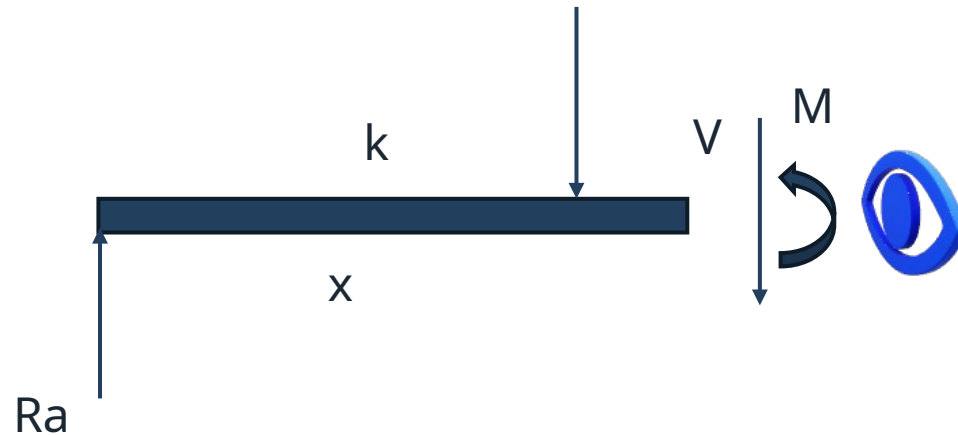


$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ R_a \cdot x - M &= 0 \\ \mathbf{M} &= \mathbf{R_a \cdot x}\end{aligned}$$

# Diagrama de Momento Fletor (M)

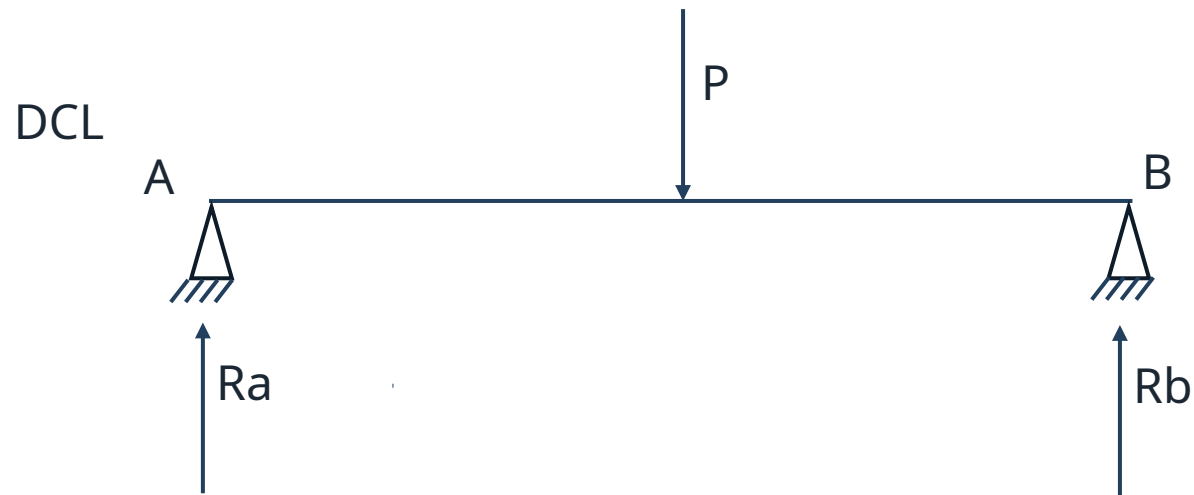


$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ Ra - P - V &= 0 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{Ra - P}\end{aligned}$$

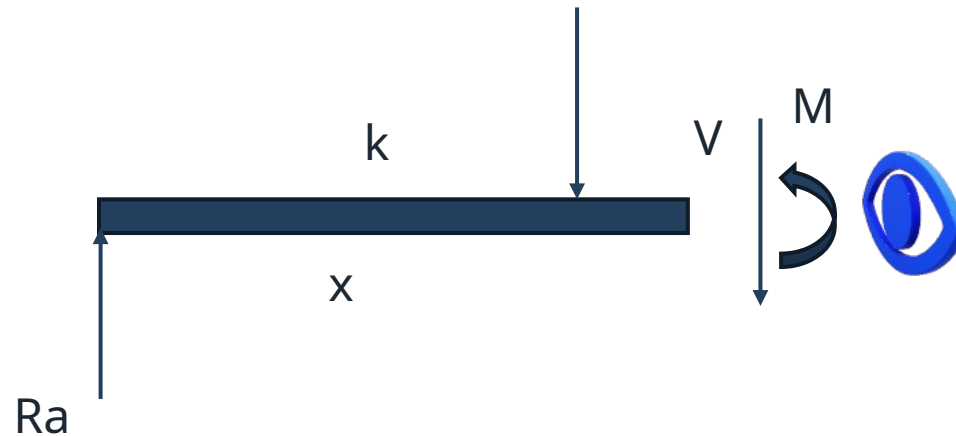


$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ Ra \cdot x - P \cdot (x - k) - M &= 0 \\ \mathbf{M} &= \mathbf{Ra \cdot x - P(x - k)}\end{aligned}$$

# Diagrama de Momento Fletor (M)



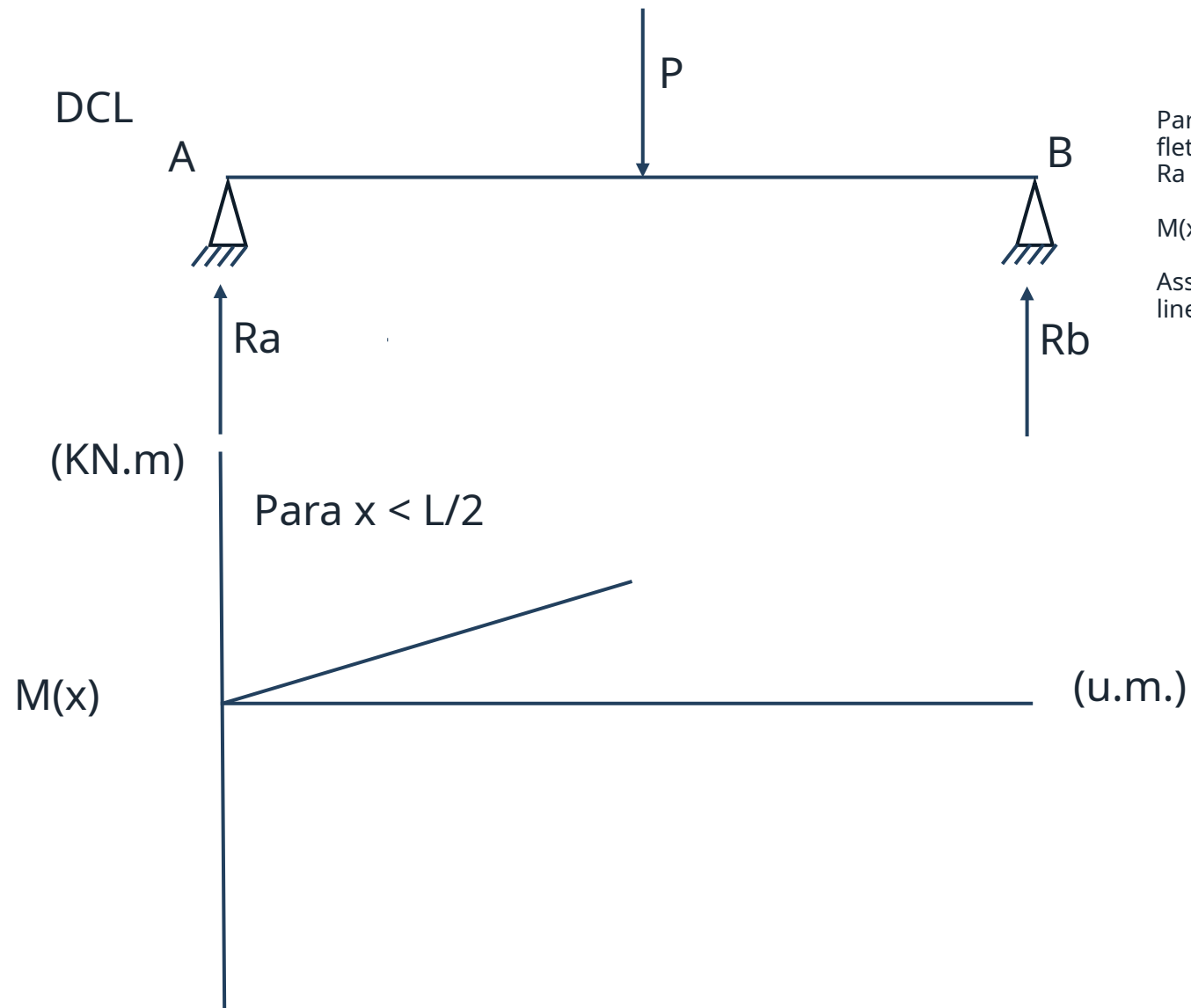
$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_a - P - V &= 0 \\ \mathbf{V} &= \mathbf{R_a - P}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum M &= 0 \\ R_a \cdot x - P \cdot (x - k) - M &= 0 \\ \mathbf{M} &= \mathbf{R_a \cdot x - P \cdot (x - k)}\end{aligned}$$

Se  $K = L/2$  e  $P > R_a$   
Então  $P \cdot x > R_a \cdot x$   
Significa que o Momento  
É positivo

# Diagrama de Momento Fletor(V)

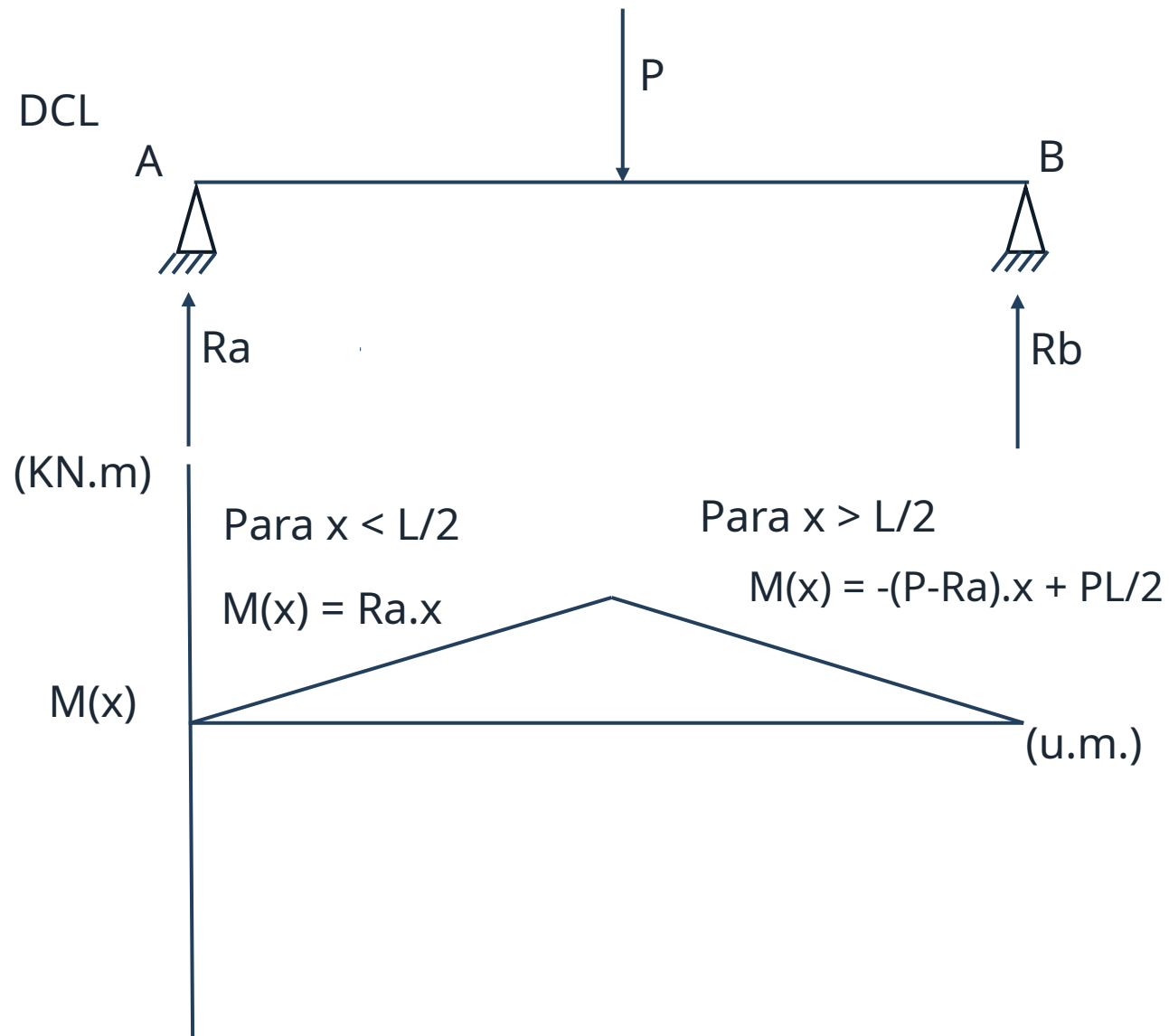


Para o primeiro trecho da viga,  $0 \leq x \leq L/2$ , o momento fletor é obtido pelo equilíbrio da seção cortada. Como  $R_a = P/2$ , tem-se:

$$M(x) = R_a x = (P/2)x.$$

Assim, o diagrama de momento fletor cresce linearmente a partir do apoio A.

# Diagrama de Momento Fletor(M)



O diagrama de momento fletor é construído por trechos. Para  $x < L/2$ , o momento cresce linearmente segundo :

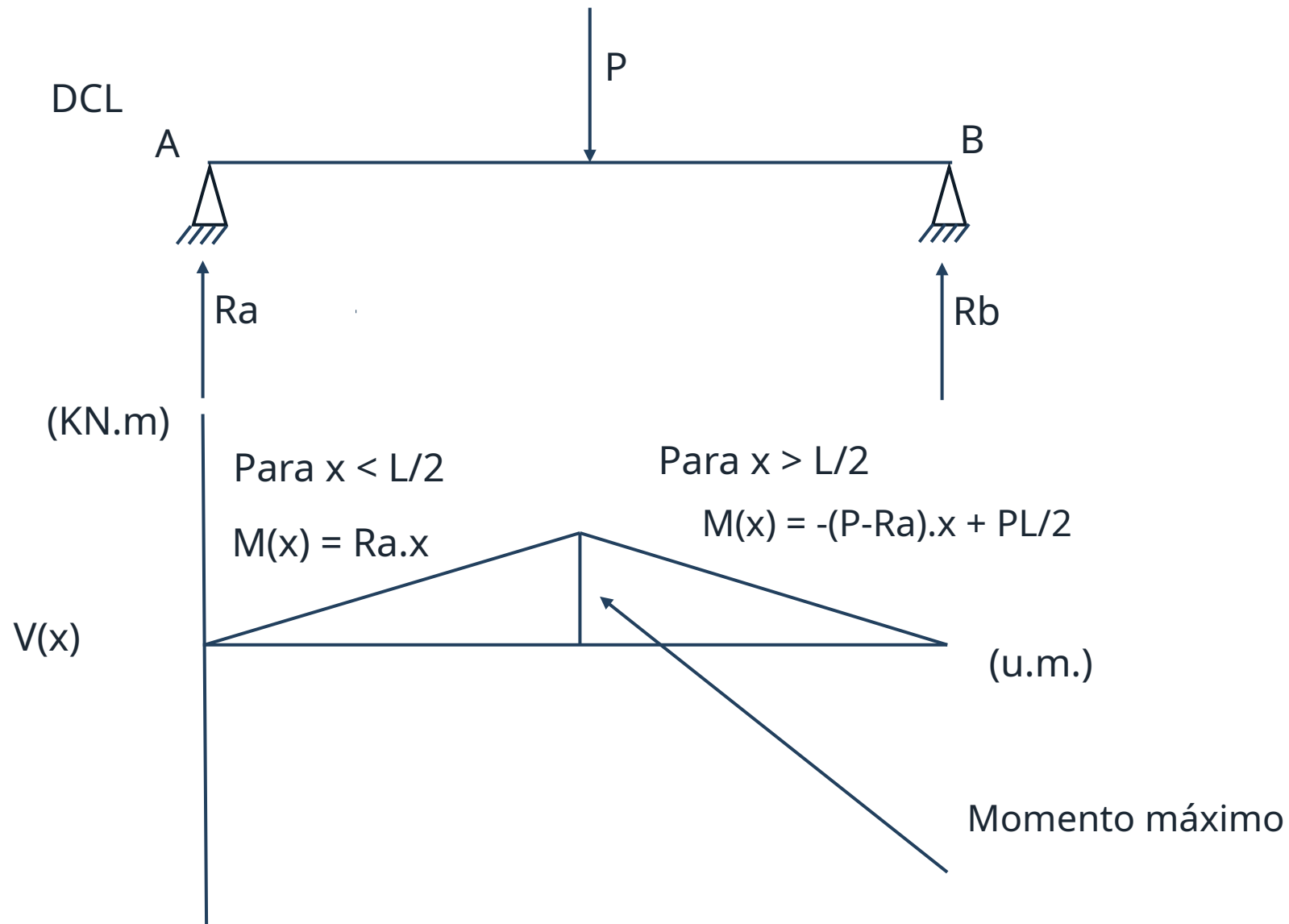
$$M(x) = Ra \cdot x$$

Para  $x > L/2$ , a carga P passa a atuar no trecho analisado, em:

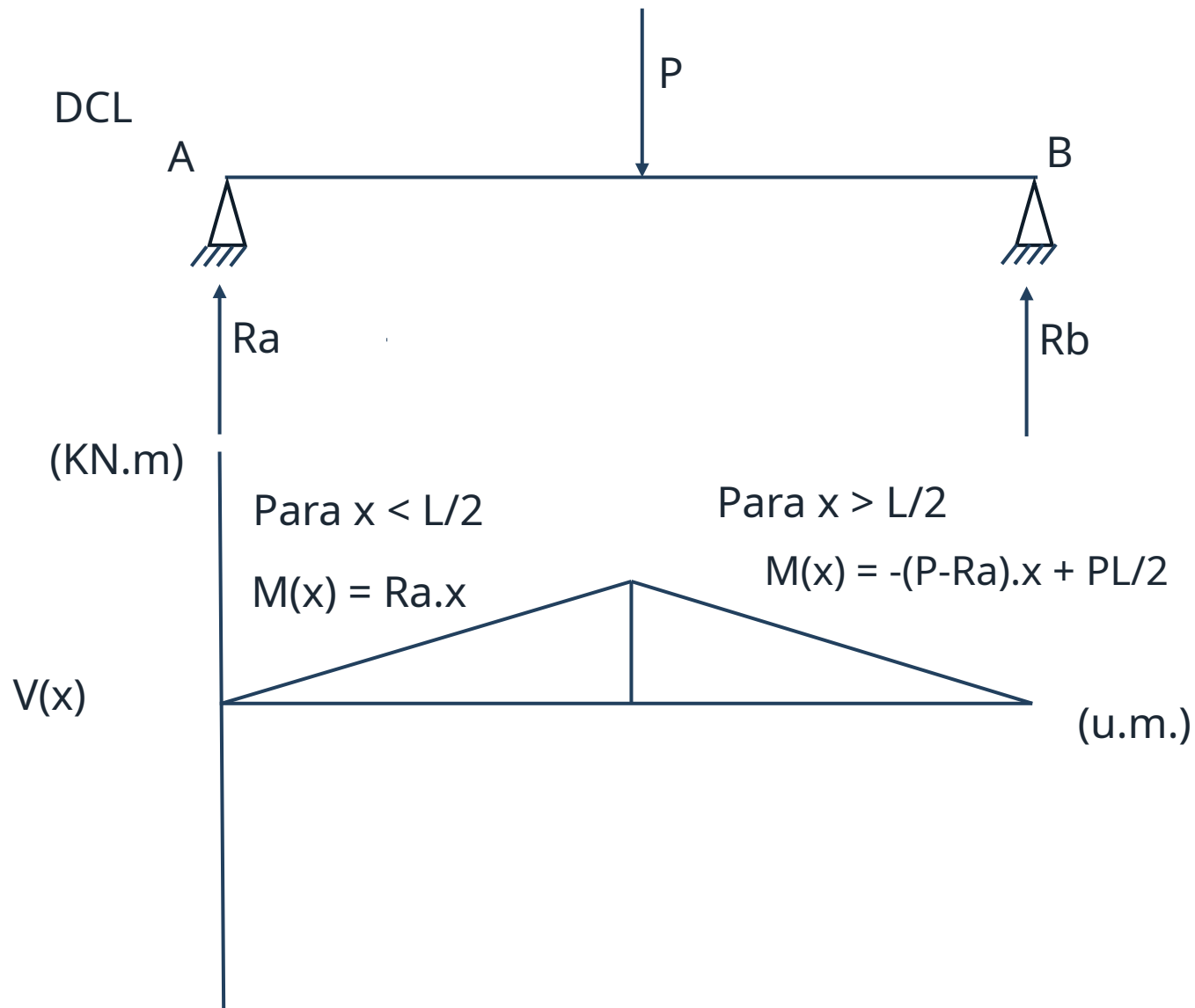
$$M(x) = Ra \cdot x - P(x - L/2)$$

O gráfico é triangular, com momento máximo no centro do vão.

# Diagrama de Momento Fletor (M)



# Diagrama de Momento Fletor(V)

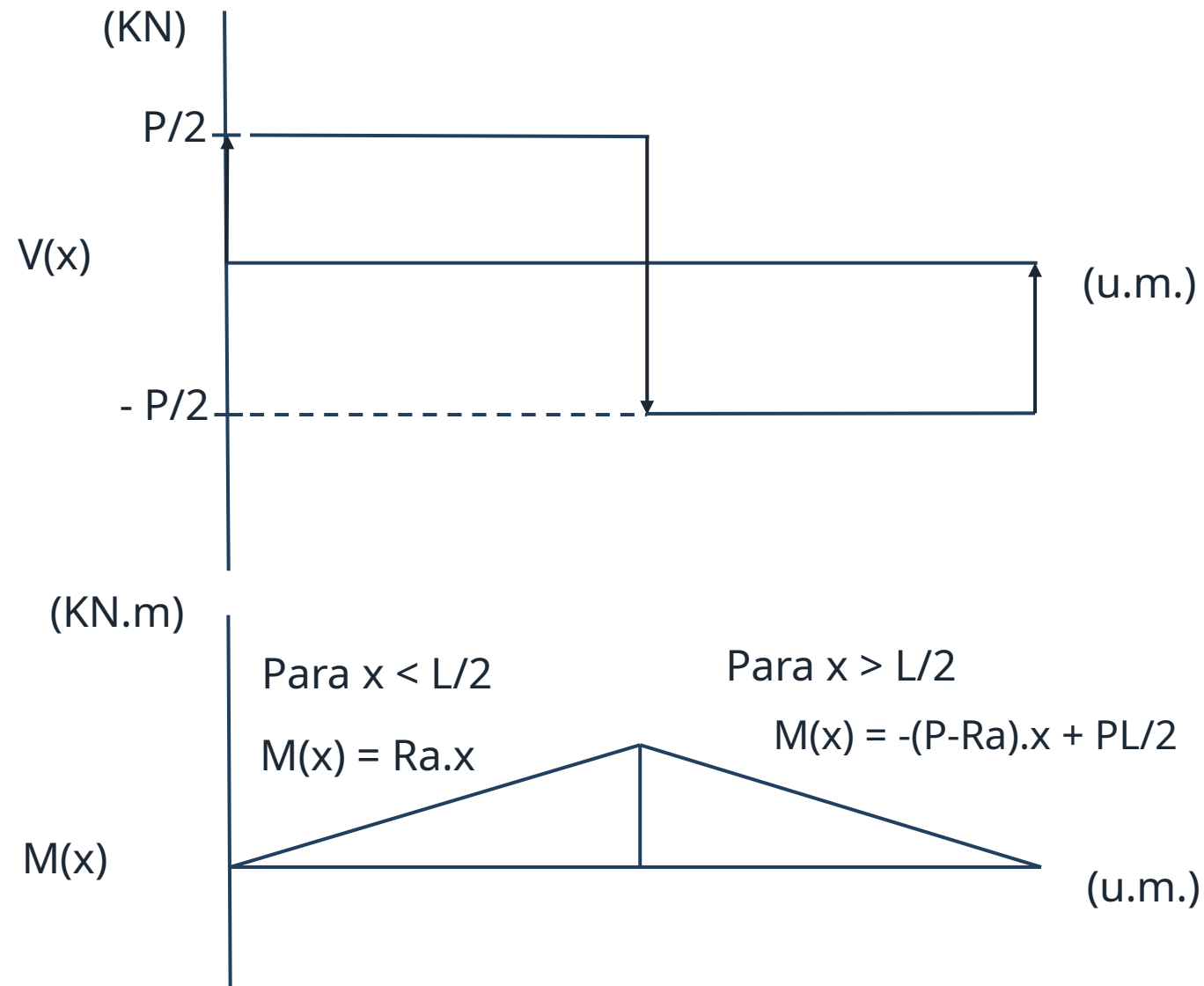


Momento máximo

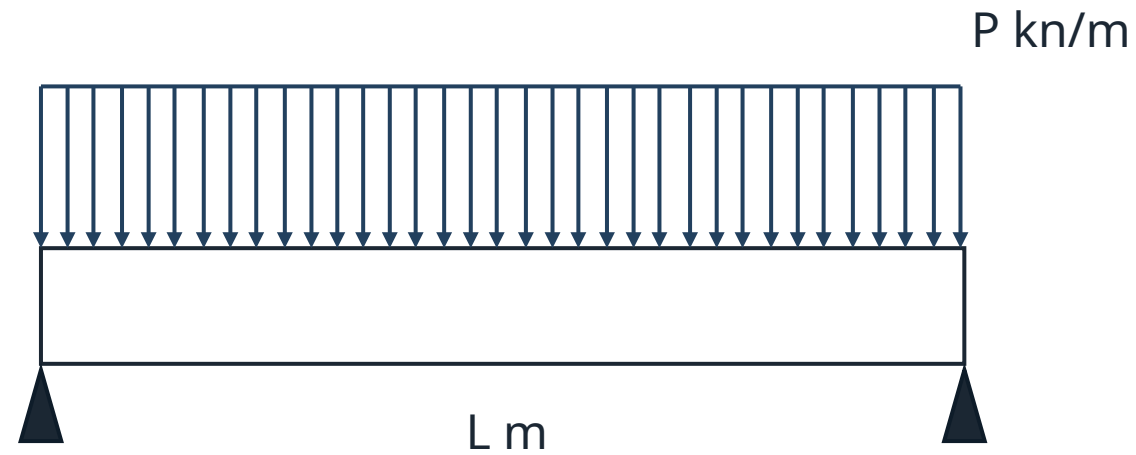
i.  $M(L/2) = RaL/2 = PL/4$

ii.  $M(L/2) = -(P - Ra) \cdot L/2 + PL/2$   
 $M(L/2) = -PL/2 + RaL/2 + PL/2$   
 $M(L/2) = RaL/2 = PL/4$

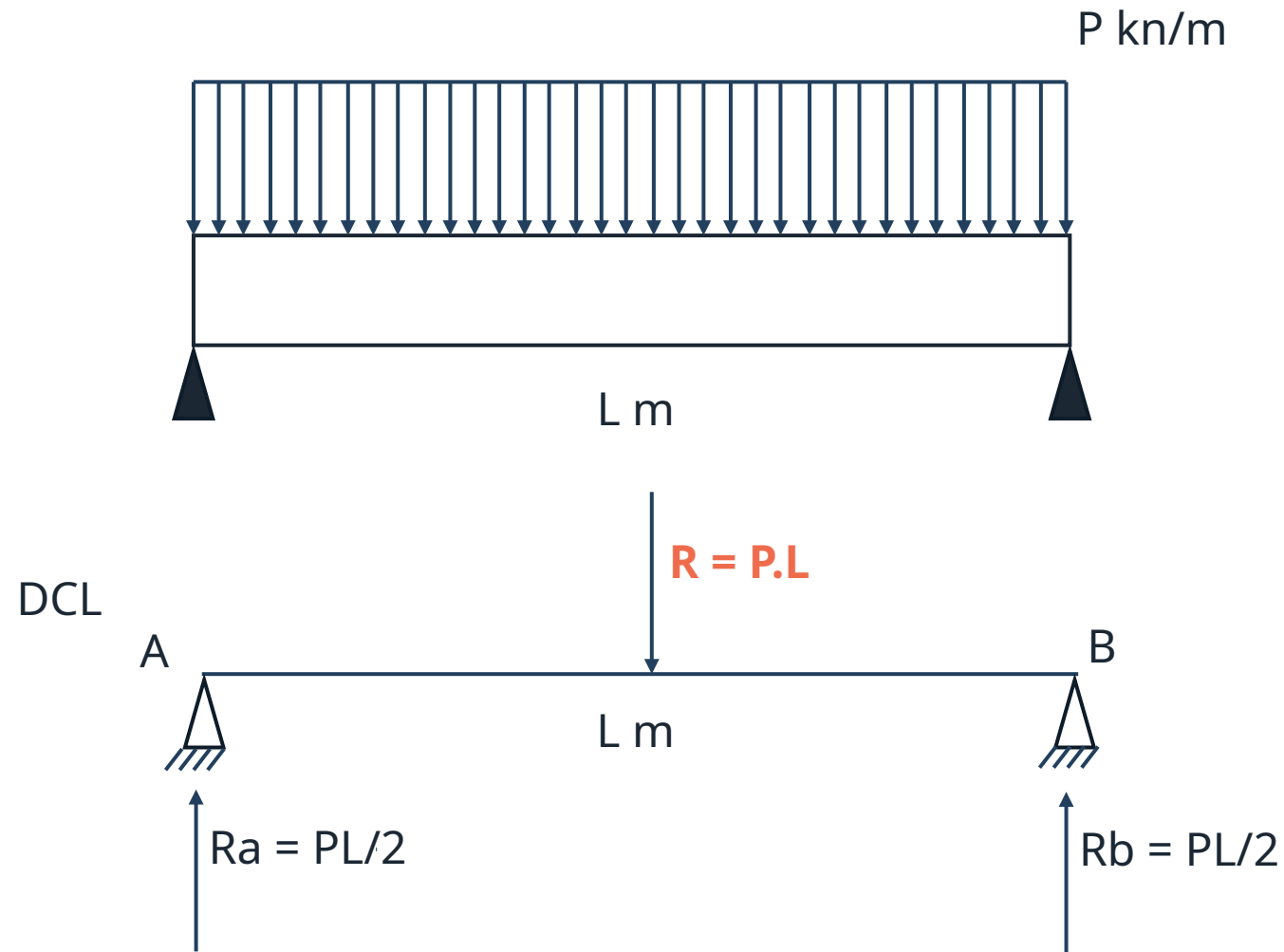
# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



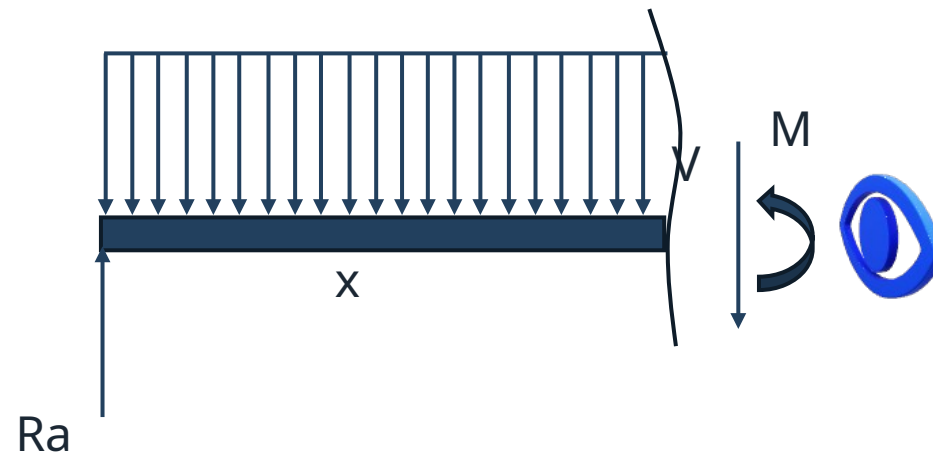
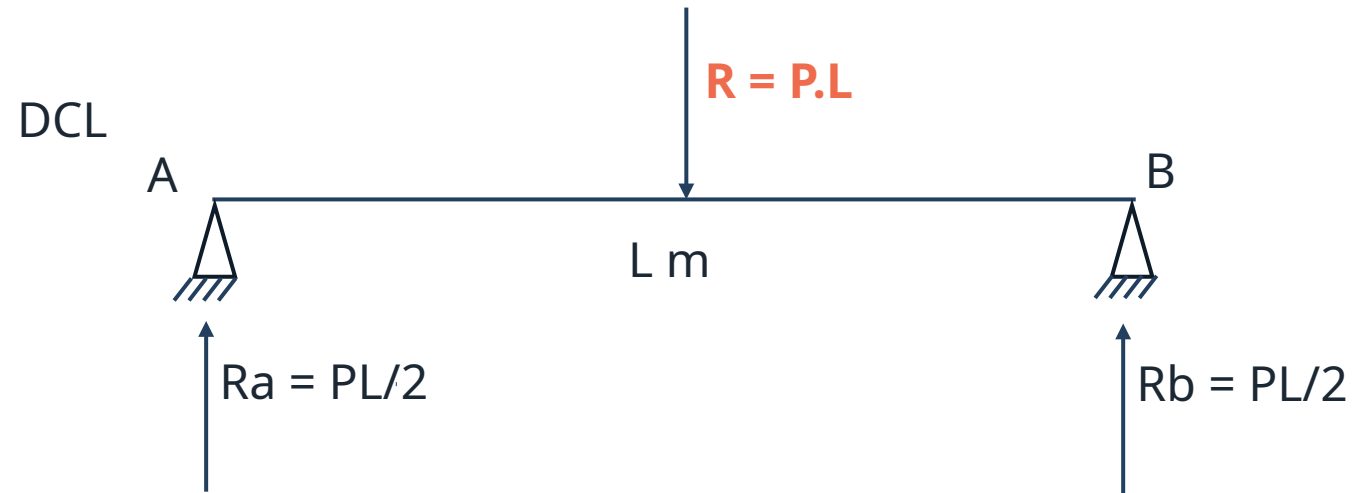
# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



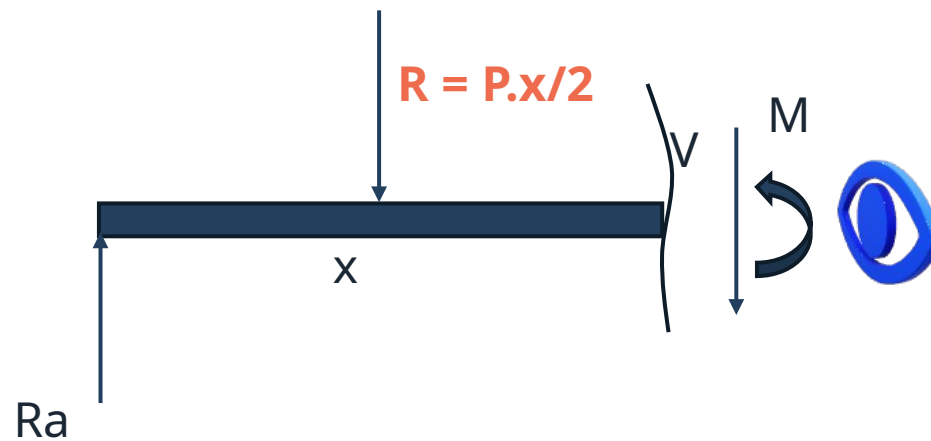
# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

$$R_a - P \cdot x/2 - V = 0$$

$$V = - P \cdot x/2 + PL/2$$



Momento (M)

$$R_a \cdot x - P \cdot x/2 \cdot x - V = 0$$

$$V = - P \cdot x^2/2 + PL/2 \cdot x$$

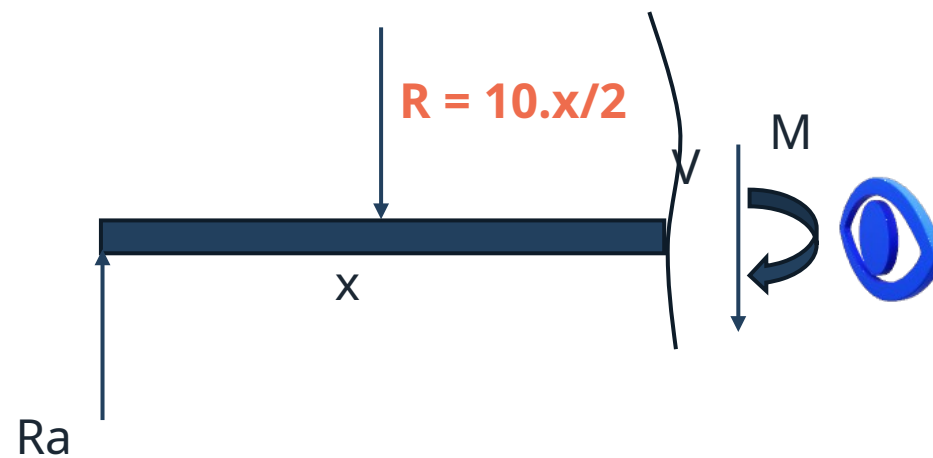
# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

$$40/3 - 10.x/2 - V = 0$$

$$V = -5.x + 40/3$$

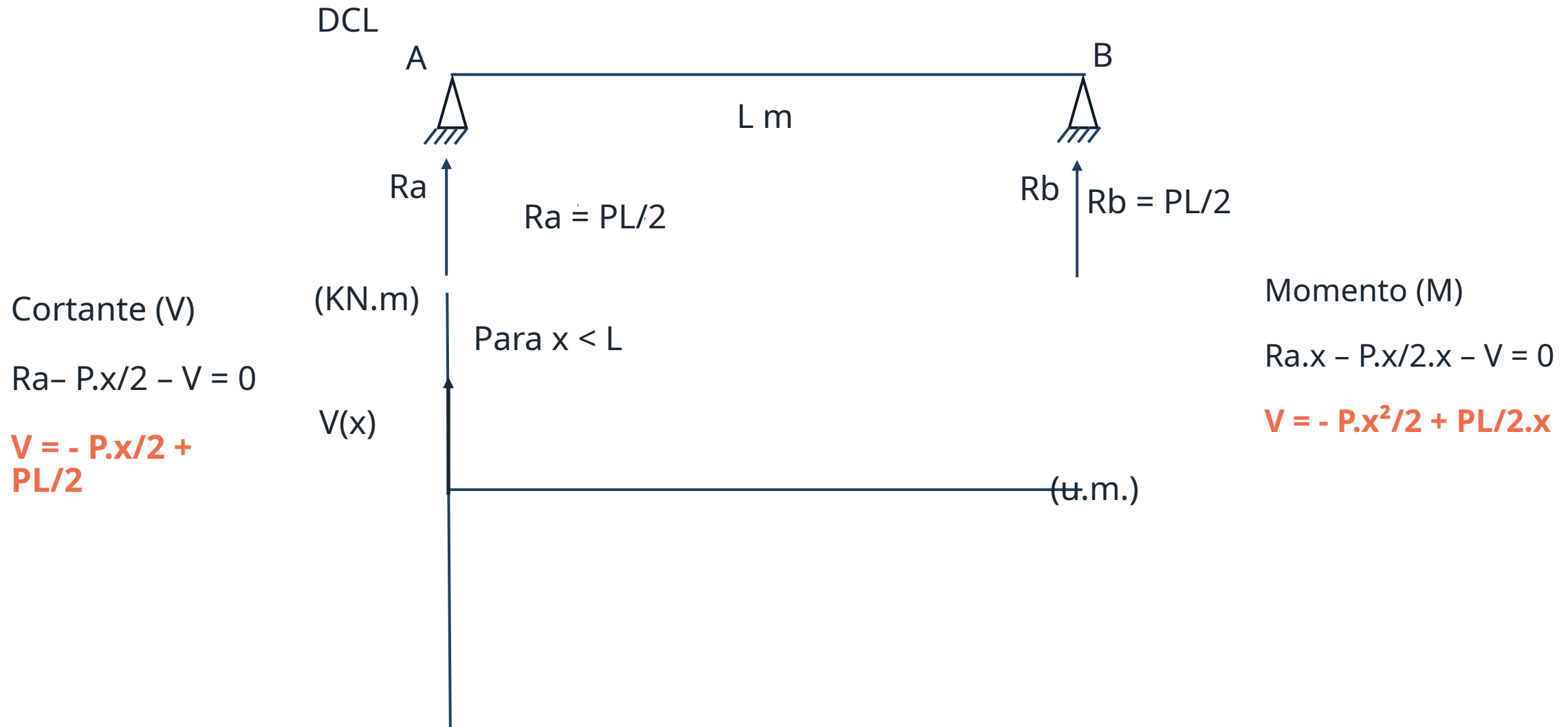


Momento (M)

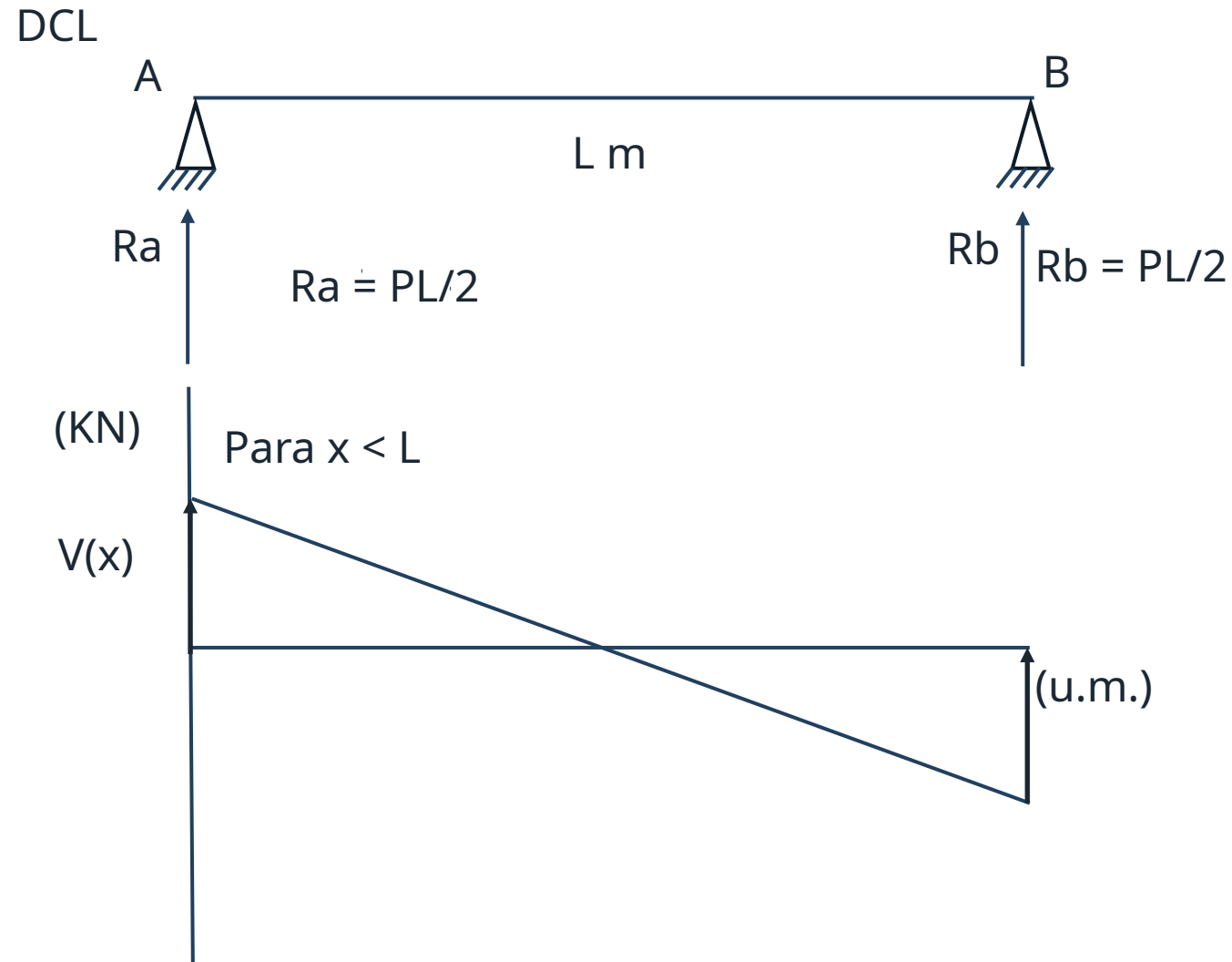
$$-R_a.x + P.x/2.x + M = 0$$

$$M = -5.x^2 + 40/3.x$$

# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

$$R_a - P \cdot x - V = 0$$

$$V = - P \cdot x + PL/2$$

# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

(KN)

Para  $x < L$

$$R_a - P \cdot x - V = 0$$

$V(x)$

$$V = - P \cdot x + PL/2$$



Momento (M)

(KN.m)

Para  $x < L$

$$R_a \cdot x - P \cdot x/2 \cdot x - M = 0$$

$M(x)$

$$M = - P \cdot x^2/2 + PL/2 \cdot x$$



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

(KN)

Para  $x < L$

$$R_a - P \cdot x/2 - V = 0$$

V(x)

$$V = - P \cdot x/2 + PL/2$$



Momento (M)

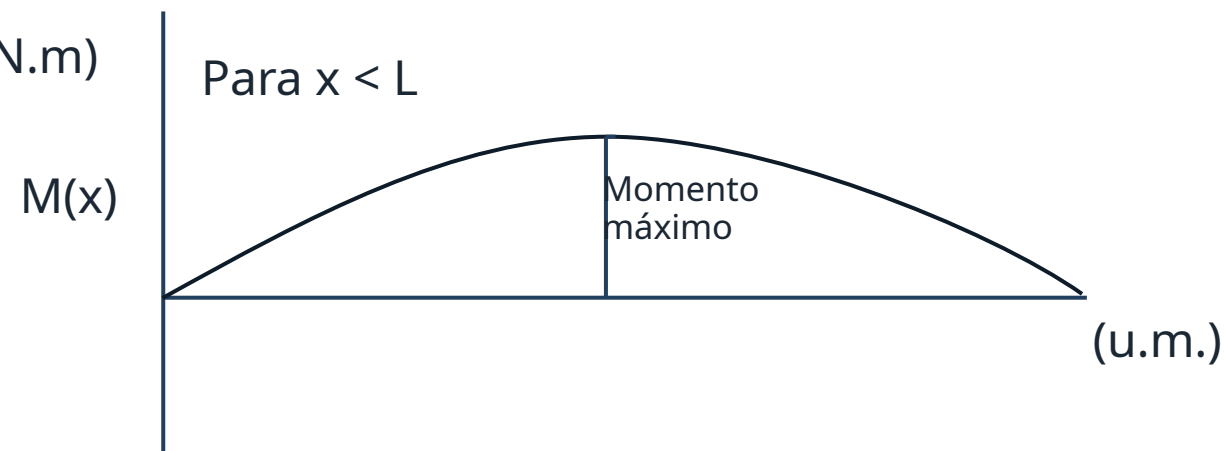
(KN.m)

Para  $x < L$

$$R_a \cdot x - P \cdot x/2 \cdot x - V = 0$$

M(x)

$$V = - P \cdot x^2/2 + PL/2 \cdot x$$



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

(KN)

Para  $x < L$

$$R_a - P \cdot x/2 - V = 0$$

$V(x)$

$$V = -P \cdot x/2 + PL/2$$



Momento (M)

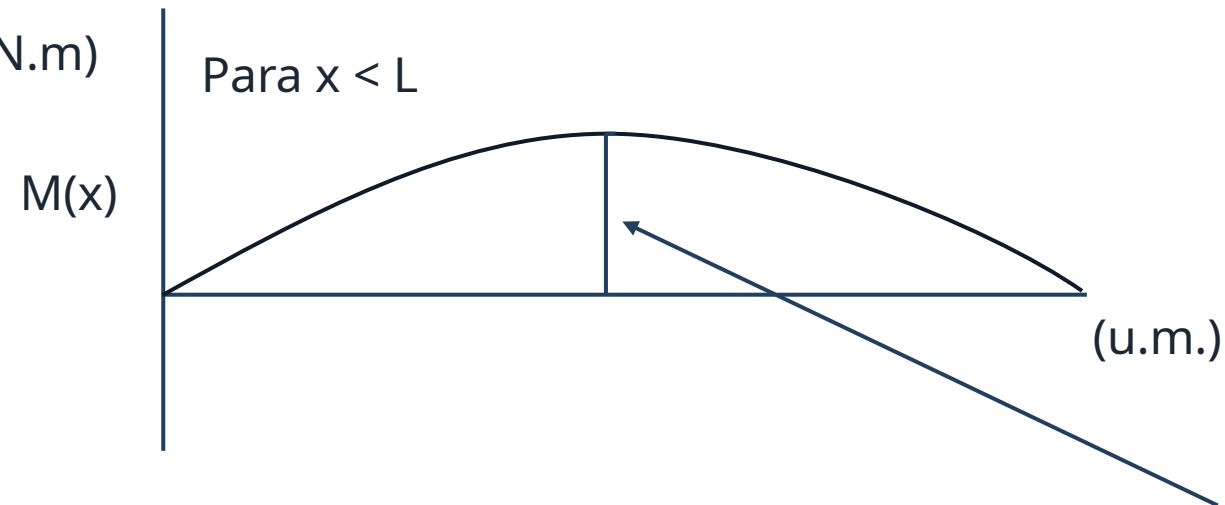
(KN.m)

Para  $x < L$

$$R_a \cdot x - P \cdot x/2 \cdot x - V = 0$$

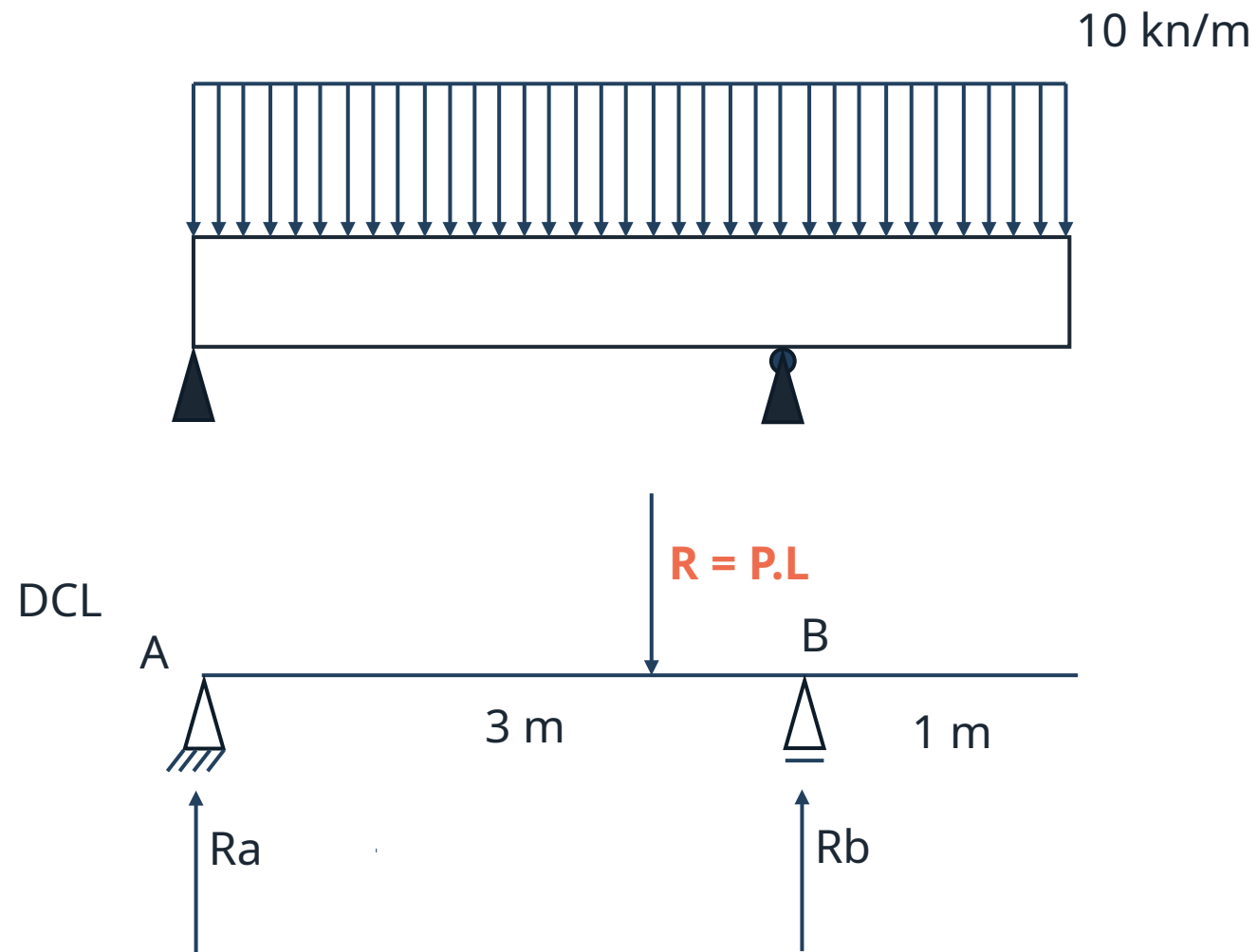
$M(x)$

$$V = -P/2 \cdot x^2 + PL/2 \cdot x$$

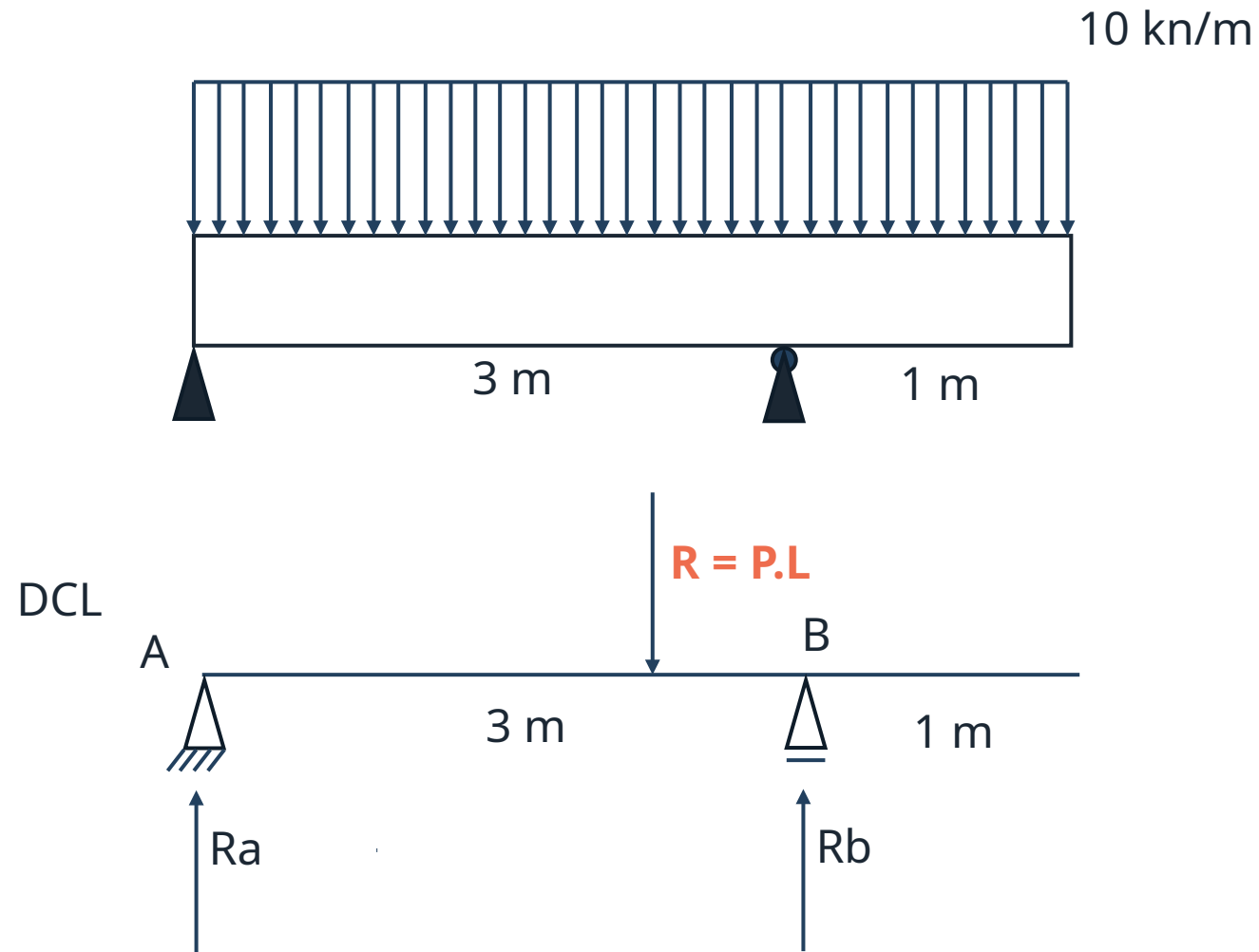


$$\begin{aligned} \text{Momento máximo} &= -\Delta/4a \\ -\Delta/4a &= -(b^2 - 4ac)/4a \\ -\Delta/4a &= -(P^2L^2/4 - 0)/4(-P/2) \\ -\Delta/4a &= PL^2/8 \end{aligned}$$

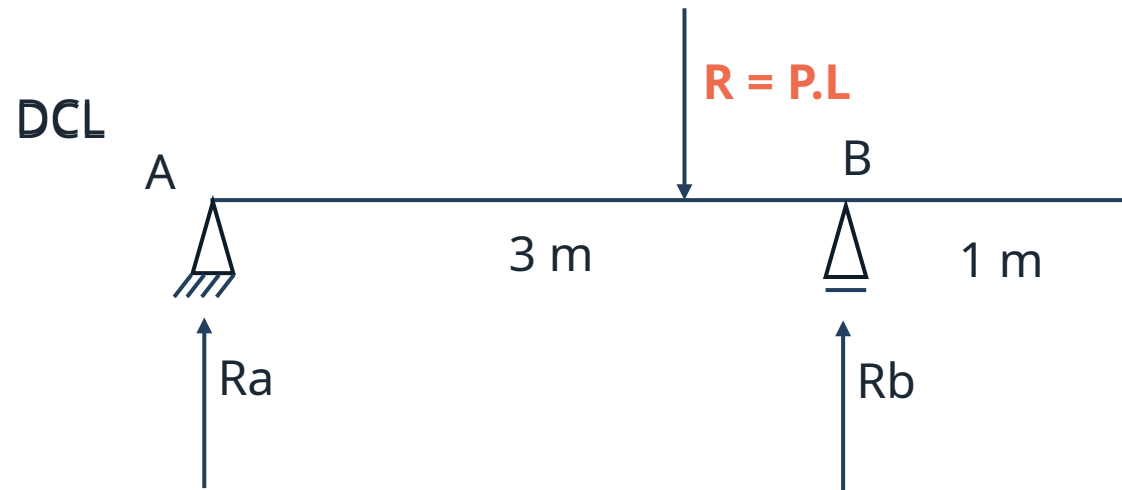
# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



- Primeiro passo:  
determinar as reações de apoio

i.  $\uparrow + \sum F_y = 0$

$$R_a - 40 + R_b = 0$$

ii.  $\curvearrowright + \sum M = 0$

Momento em relação ao ponto

A:

$$-40 \cdot 2 + R_b \cdot 3 = 0$$

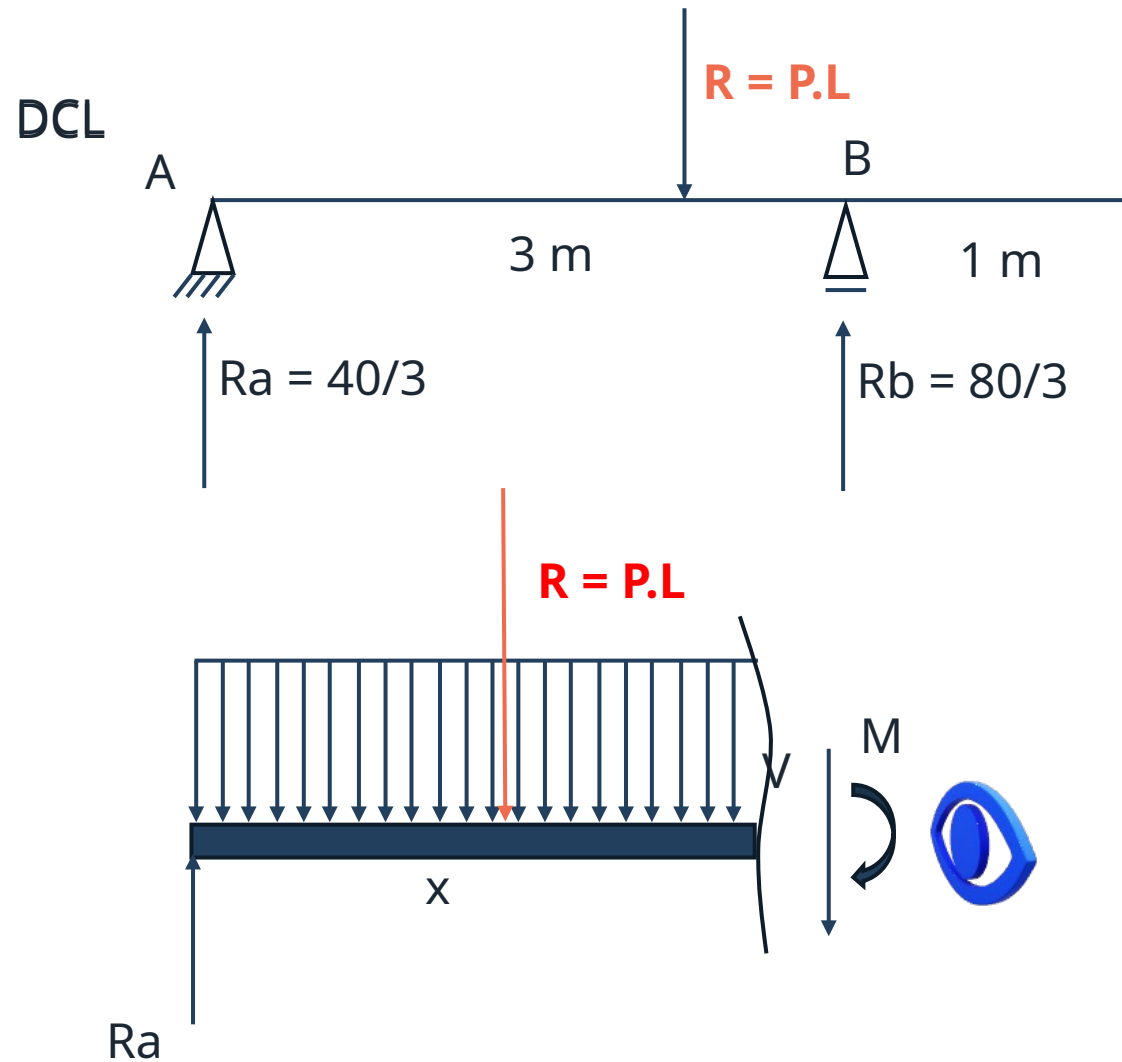
$$R_b = 80/3 \text{ KN}$$

Sendo i e ii:

$$R_a = (120 - 80)/3$$

$$R_a = 40/3$$

# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

$$40/3 - 10.x - V = 0$$

$$V = -10.x + 40/3$$

Momento (M)

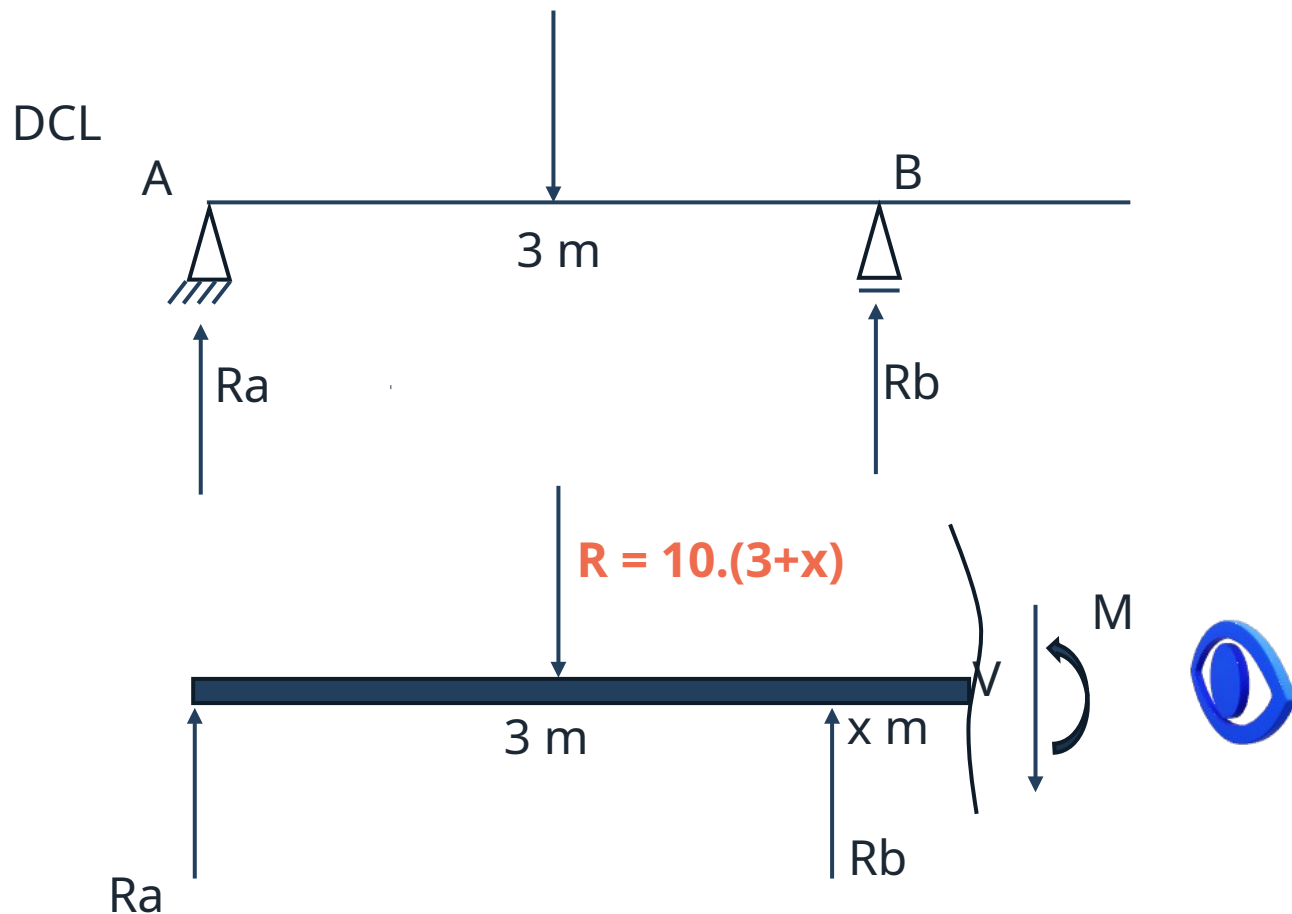
$$-R_a.x + P.x.x/2 - M = 0$$

$$M = -5.x^2 + 40/3.x$$

$$M'(x) = V(x) = -10x + 40/3$$

OK

# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

$$40/3 - 10 \cdot (3+x) + 80/3 - V = 0$$

$$V = -30 - 10x + 40 = -10x + 10$$

Momento (M)

$$-R_a \cdot (3+x) + P \cdot (x+3) \cdot (x+3)/2 - R_b x + M = 0$$

$$-M = -40 - 40 \cdot x/3 + 10(x^2+6x+9)/2 - 80 \cdot x/3$$

$$-M = -40 - 40x + 5x^2 + 30x + 45$$

$$M = -5x^2 + 10x - 5$$

$$M'(x) = V(x) = -10x + 10 \text{ OK}$$



## REGRA PRÁTICA PARA O MOMENTO INTERNO $M$

Ao cortar a viga, isole um dos lados da seção.

As forças externas do trecho isolado tendem a girar a barra em um determinado sentido.

O momento interno  $M$  aparece na seção cortada para equilibrar essa tendência de giro.

Portanto:

*O momento interno sempre resiste ao giro causado pelas forças externas.*

Depois de encontrar o sentido real de  $M$ , aplica-se a convenção de sinal:

*Tração nas fibras inferiores  $\Rightarrow M > 0$*

*Tração nas fibras superiores  $\Rightarrow M < 0$*

Assim:

*$M > 0 \Rightarrow$  momento positivo ou sagente*

*$M < 0 \Rightarrow$  momento negativo ou fletor superior*

Uma versão mais curta para caber melhor no slide:

## REGRA DE OURO

*O momento interno resiste a rotação causada pelas forças externas.*

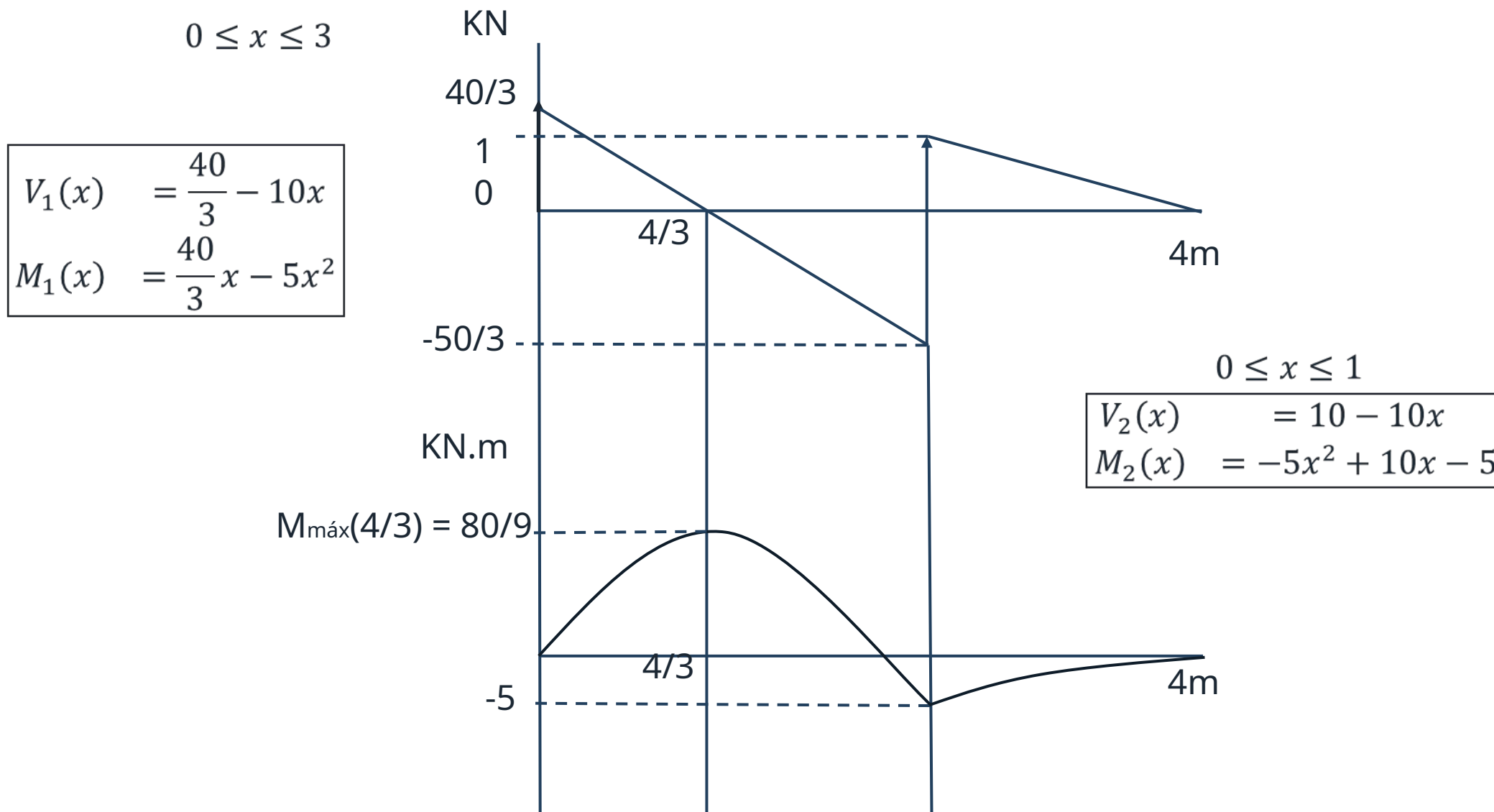
Se a flexão traciona as fibras inferiores:

$$M > 0$$

Se a flexão traciona as fibras superiores:

$$M < 0$$

# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



# O que é deflexão?

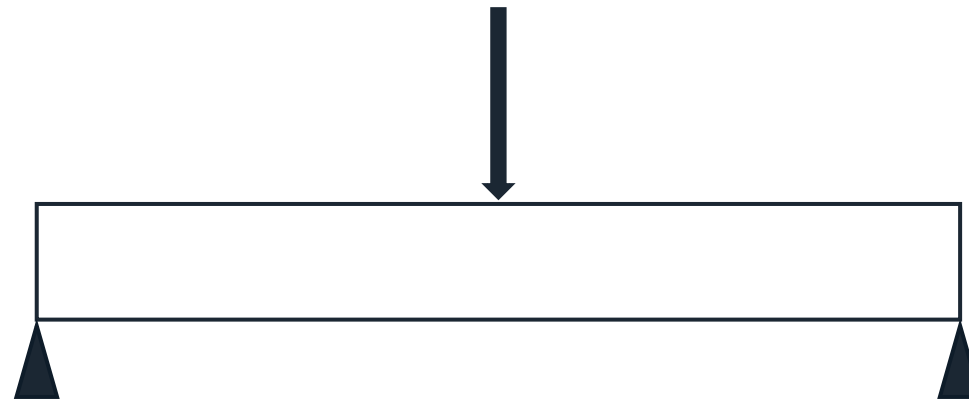


A **deflexão** é o deslocamento transversal do eixo longitudinal da viga.  
Representa-se por:

$v(x)$

onde:

$v(x)$ =deslocamento vertical da viga em função da posição da curva deformada do eixo da viga é chamada de **linha elástica** ou **curva de deflexão**.



# O que é deflexão?

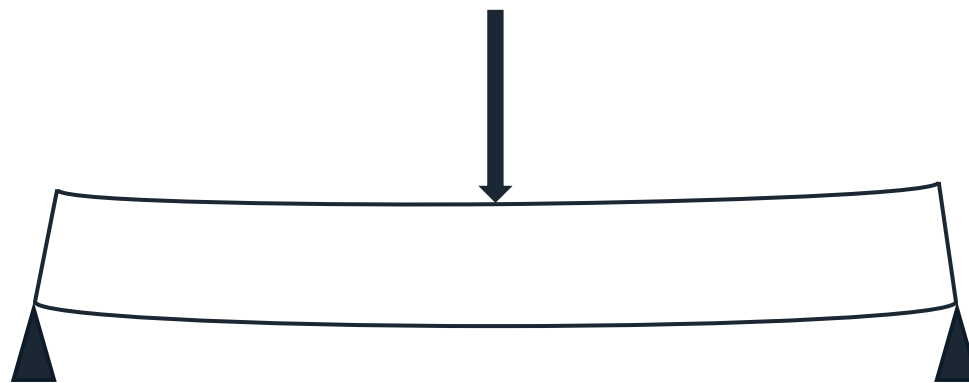


A **deflexão** é o deslocamento transversal do eixo longitudinal da viga.  
Representa-se por:

$$v(x)$$

onde:

$v(x)$ =deslocamento vertical da viga em função da posição da curva deformada do eixo da viga é chamada de **linha elástica** ou **curva de deflexão**.



# O que é deflexão?

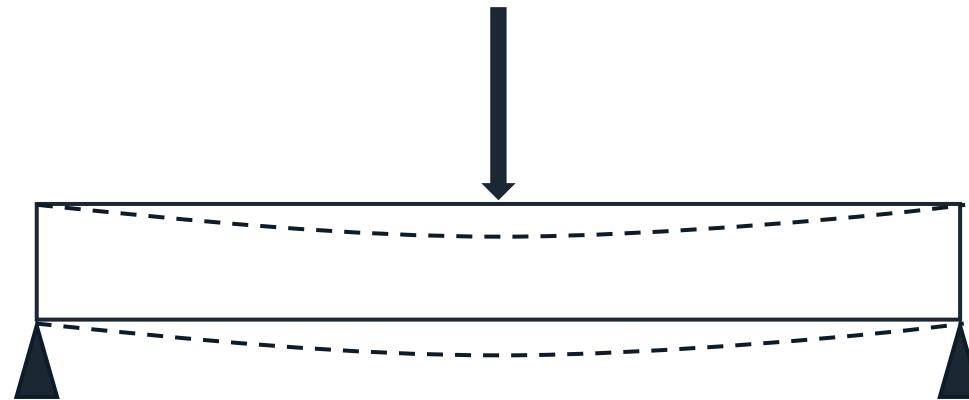


A **deflexão** é o deslocamento transversal do eixo longitudinal da viga.  
Representa-se por:

$v(x)$

onde:

$v(x)$ =deslocamento vertical da viga em função da posição da curva deformada do eixo da viga é chamada de **linha elástica** ou **curva de deflexão**.



# O que é deflexão?

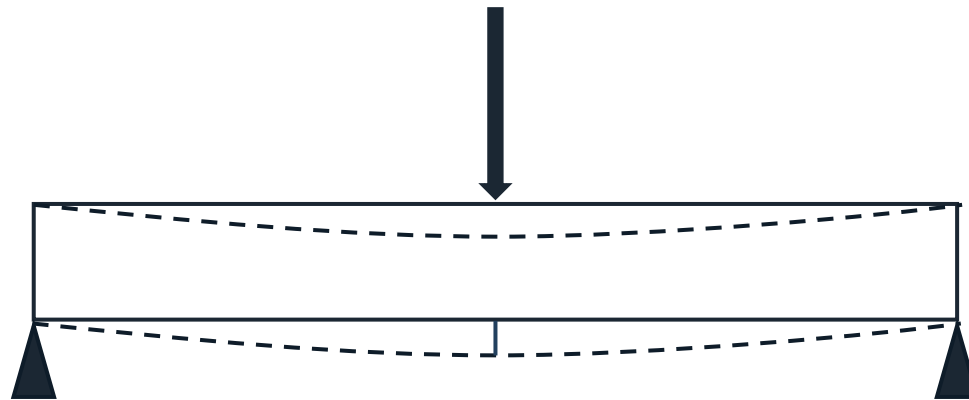


A **deflexão** é o deslocamento transversal do eixo longitudinal da viga.  
Representa-se por:

$$v(x)$$

onde:

$v(x)$ =deslocamento vertical da viga em função da posição da curva deformada do eixo da viga é chamada de **linha elástica** ou **curva de deflexão**.



# O que é deflexão?

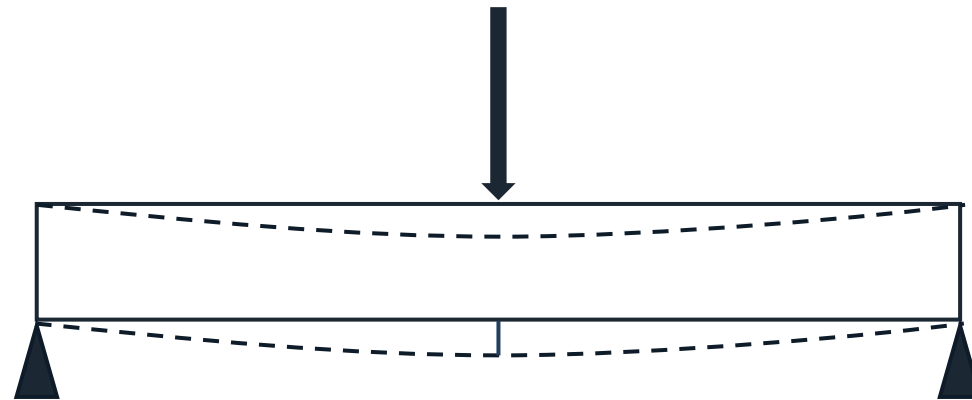


A **deflexão** é o deslocamento transversal do eixo longitudinal da viga.  
Representa-se por:

$$v(x)$$

onde:

$v(x)$ =deslocamento vertical da viga em função da posição da curva deformada do eixo da viga é chamada de **linha elástica** ou **curva de deflexão**.



# O que é deflexão?

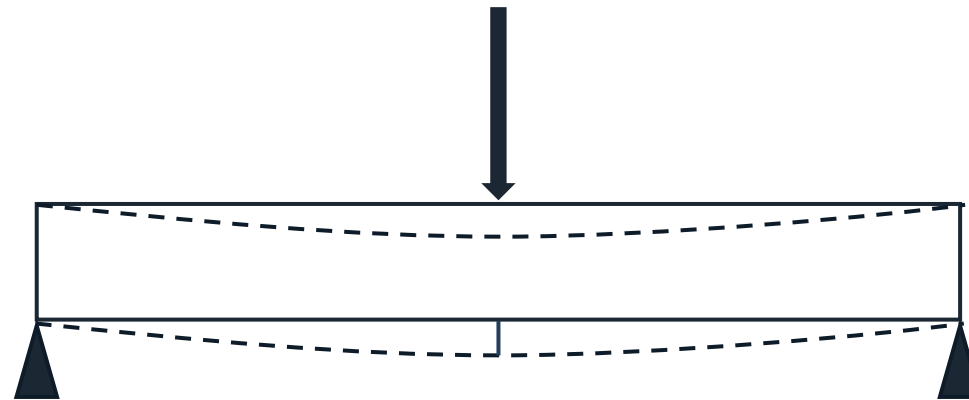
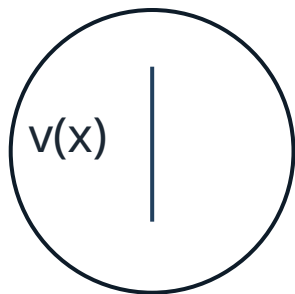


A **deflexão** é o deslocamento transversal do eixo longitudinal da viga.  
Representa-se por:

$v(x)$

onde:

$v(x)$ =deslocamento vertical da viga em função da posição da curva deformada do eixo da viga é chamada de **linha elástica** ou **curva de deflexão**.



# O que é deflexão?

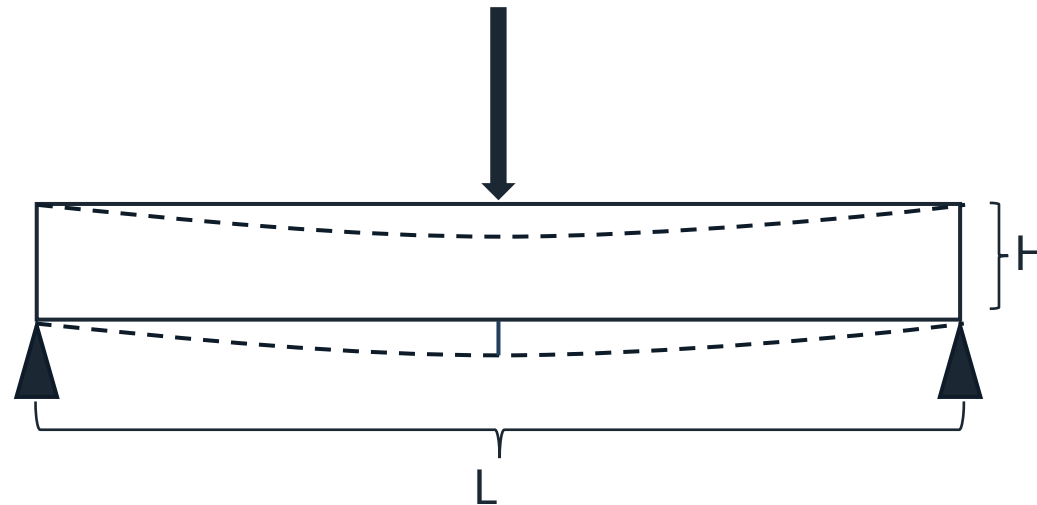
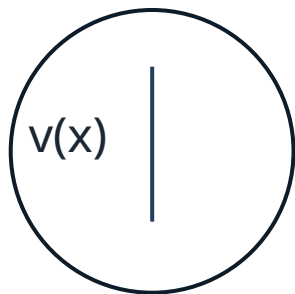


A **deflexão** é o deslocamento transversal do eixo longitudinal da viga.  
Representa-se por:

$v(x)$

onde:

$v(x)$ =deslocamento vertical da viga em função da posição da curva deformada do eixo da viga é chamada de **linha elástica** ou **curva de deflexão**.



# O que é deflexão?

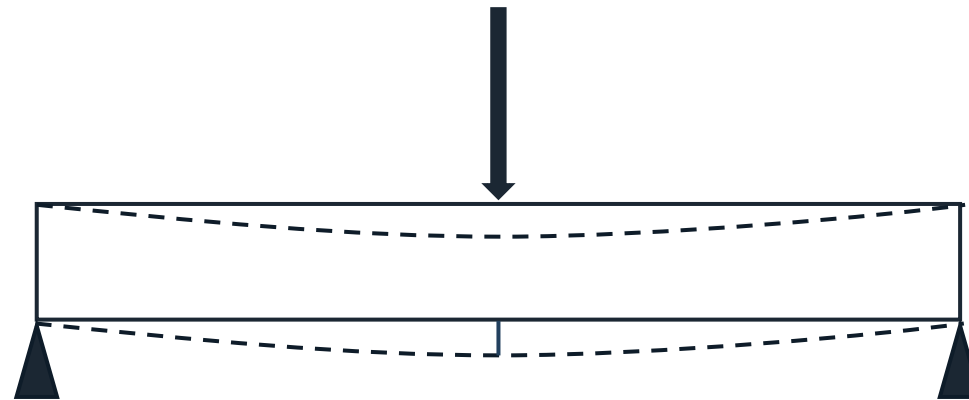
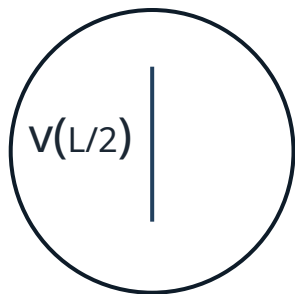


A **deflexão** é o deslocamento transversal do eixo longitudinal da viga.  
Representa-se por:

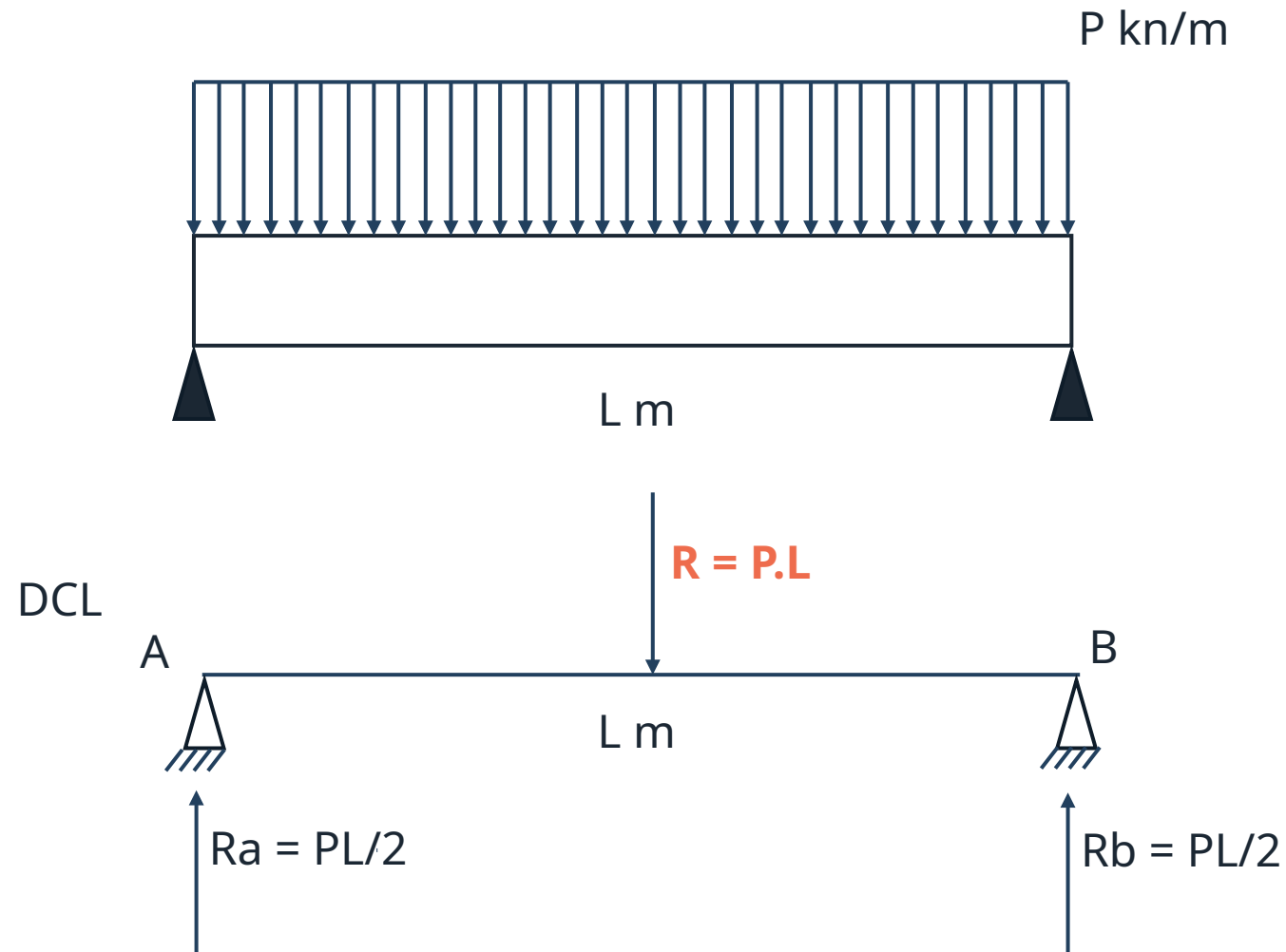
$$v(x)$$

onde:

$v(x)$ =deslocamento vertical da viga em função da posição da curva deformada do eixo da viga é chamada de **linha elástica** ou **curva de deflexão**.



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Cortante (V)

(KN)

Para  $x < L$

$$R_a - P \cdot x - V = 0$$

$V(x)$

$$V = - P \cdot x + PL/2$$



Momento (M)

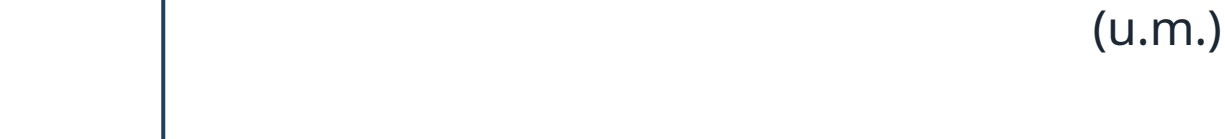
(KN.m)

Para  $x < L$

$$R_a \cdot x - P \cdot x/2 \cdot x - M = 0$$

$M(x)$

$$M = - P \cdot x^2/2 + PL/2 \cdot x$$



# Diagrama de Esforço Cortante (V) e Momento Fletor



Para carga uniformemente distribuída  $P$ , o cortante correto é:

$$V(x) = \frac{PL}{2} - Px$$

A equação do momento com carga distribuída uniforme:

$$M(x) = \frac{PL}{2}x - \frac{Px^2}{2}$$

com domínio:

$$0 \leq x \leq L$$

A partir dela:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$
$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{PL}{2}x - \frac{Px^2}{2}$$

Integrando duas vezes e aplicando as condições de apoio:

$$v(0) = 0$$
$$v(L) = 0$$

obtém-se:

$$v(x) = \frac{P}{24EI} (2Lx^3 - x^4 - L^3x)$$

Essa expressão considera deslocamento positivo para cima. Por isso, no meio do vão, o valor sai negativo:

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5PL^4}{384EI}$$



Logo, a flecha máxima em módulo é:

$$|\delta_{\max}| = \frac{5PL^4}{384EI}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{PL}{2} - Px \\ M(x) &= \frac{PL}{2}x - \frac{Px^2}{2} \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq L$$

$$v(x) = \frac{P}{24EI} (2Lx^3 - x^4 - L^3x)$$

$$\delta_{\max} = \frac{5PL^4}{384EI} \text{ em } x = \frac{L}{2}$$



Flambagem é uma falha por **instabilidade**, não necessariamente por ruptura do material.

Uma barra comprimida pode perder estabilidade lateral antes de atingir a tensão de escoamento.

- $P < P_{cr} \Rightarrow$  *equilíbrio estável*
- $P = P_{cr} \Rightarrow$  *equilíbrio crítico*
- $P > P_{cr} \Rightarrow$  *flambagem*



Para uma coluna ideal, reta, elástica e comprimida axialmente:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

Onde:

- $P_{cr}$  = carga crítica de flambagem
- $E$  = módulo de elasticidade
- $I$  = menor momento de inércia da seção
- $L$  = comprimento real da coluna
- $K$  = fator de comprimento efetivo

A flambagem ocorre preferencialmente em torno do eixo de menor rigidez, por isso usa-se o menor  $I$ .



## Comprimento efetivo

$$L_e = KL$$

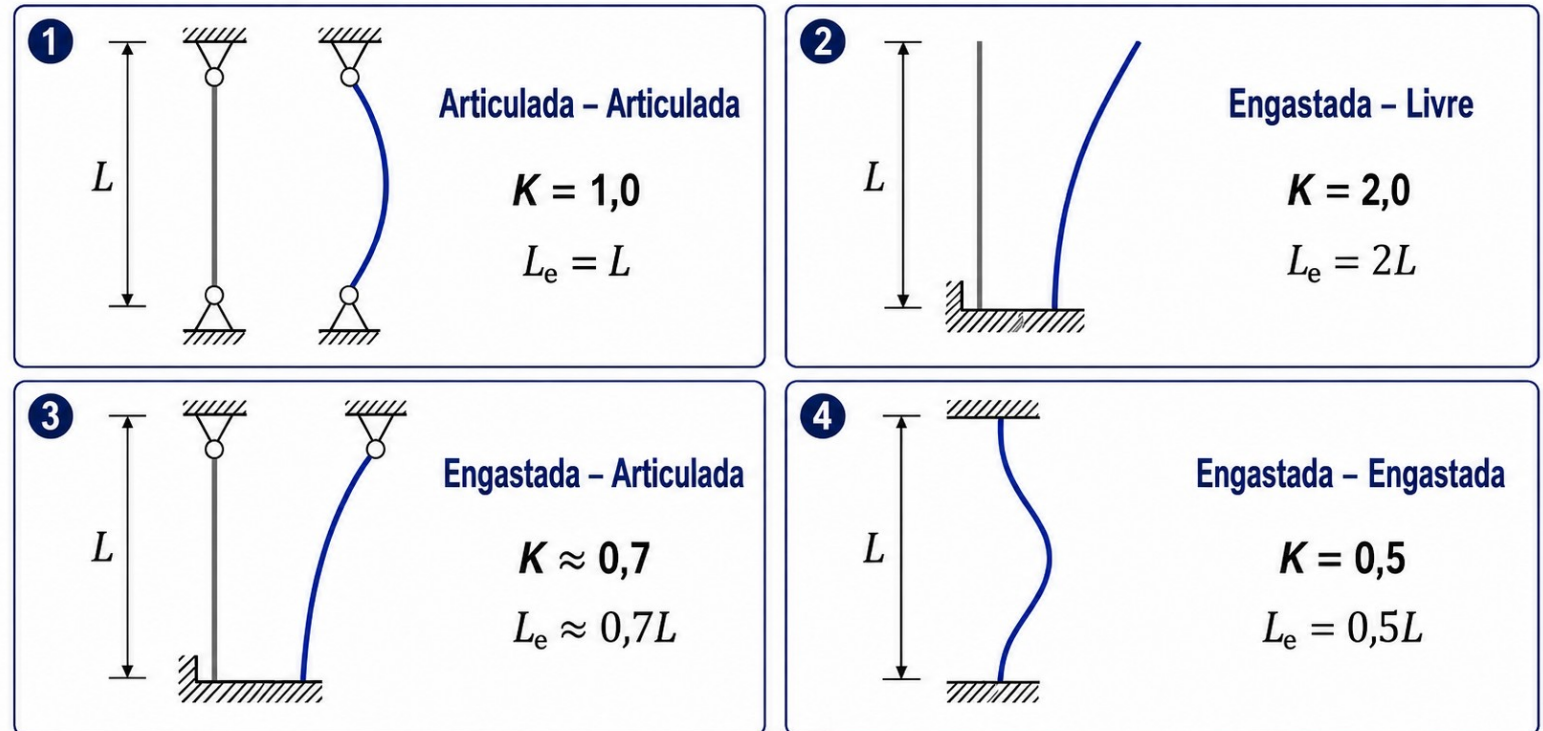
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

Valores usuais:

- articulada-articulada:  $K = 1,0$
- engastada-livre:  $K = 2,0$
- engastada-articulada:  $K \approx 0,7$
- engastada-engastada:  $K = 0,5$

Quanto maior o comprimento efetivo, menor a carga crítica.

## Condições de apoio e fator de comprimento efetivo (K)



$L_e$  = comprimento efetivo



O raio de giração é:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

O índice de esbeltez é:

$$\lambda = \frac{KL}{r}$$

A tensão crítica de Euler pode ser escrita como:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$$

Colunas muito esbeltas tendem a falhar por flambagem elástica.

Colunas curtas tendem a falhar por compressão/escoamento.



Identificar as condições de apoio.

Escolher o fator  $K$ .

Calcular o comprimento efetivo:

$$L_e = KL$$

Escolher o menor momento de inércia:

$$I_{\min}$$

Calcular a carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(KL)^2}$$

Comparar com a carga aplicada:

$P < P_{cr} \Rightarrow$  seguro contra flambagem

$P \geq P_{cr} \Rightarrow$  risco de flambagem